GAIMME

LINEAMIENTOS PARA LA EVALUACIÓN E INSTRUCCIÓN EN LA EDUCACIÓN EN MODELACIÓN MATEMÁTICA

CONSORTIUM FOR MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS (COMAP)

SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS (SIAM)

GAIMME ES FINANCIADO Y PUBLICADO CONJUNTAMENTE POR:

Consorcio para las Matemáticas y su Aplicación
COMAP S.A
175 Middlesex Turnpike, Suite 3B
Bedford, MA 01730 USA
info@comap.com

Sociedad para las Matemáticas Industriales y Aplicadas
SIAM
3600 Market Street, 6th Floor
Philadelphia, PA 19104 USA
service@siam.org

COOPERACIÓN Y APOYO ADICIONAL PROVISTO POR:

Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas
1906 Association Drive
Reston, VA 20191
NCTM@NCTM.org

Reto Moody's Mega Math (M3)
a/c SIAM
Philadelphia, PA 19104
M3Challenge@siam.org

EQUIPO DE ESCRITURA:

¿Qué es Modelación Matemática?: Karen Bliss*, Jessica Libertini
Preescolar, primaria y secundaria: Rachel Levy*, Rose Mary Zbiek, Ben Galluzzo, Mike Long
Media superior: Dan Teague*, Landy Godbold, Joe Malkevitch, Henk van der Kooij
Nivel universitario: Frank Giordano*, Karen Bliss, Katie Fowler, Henry Pollak, Jessica Libertini
Recursos: Heather Gould
Editores: Sol Garfunkel*, Michelle Montgomery
**Autores principales*

PRODUCCIÓN:

Primera Edición: abril 2016
Impreso y encuadernado en los Estados Unidos de América

1a ed. en español, 2020.
Coordinación general de la traducción: Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Traductor: Emiliano Quintanar
Revisión técnica: Patrick Scott y Nelly León.

ISBN: 978-1-611974-43-0
eISBN: 978-1-611974-44-7

CONTENIDOS

PREFACIO CIAEM

En los últimos años, la participación de los contextos reales ha cobrado gran importancia en la Educación Matemática. Tanto para favorecer el interés de los estudiantes como para potenciar dimensiones centrales de las prácticas matemáticas. Se ha dado un cambio cualitativo en las visiones dominantes sobre la naturaleza de las Matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza. La modelación se inscribe dentro de esas poderosas tendencias internacionales. No se restringe solo a un conjunto de técnicas o resultados, invoca toda una perspectiva educativa.

Para el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) ha sido un honor haber gestionado y conducido la traducción al español de *GAIMME* (*Lineamientos para la Evaluación e Instrucción en la Educación en Modelación Matemática*), una importante y sintética obra publicada por COMAP y SIAM. Es la cuarta oportunidad en un tiempo de cinco años que gestionamos traducciones al español de obras publicadas por instituciones de los Estados Unidos. Las primeras tres eran publicaciones del NCTM (*De los principios a la acción, 5 prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemáticas y Enfoque de las Matemáticas para la Educación Media Superior: Estadística y Probabilidad*) que expresan la relación estrecha y la amistad que han existido durante muchos años entre el NCTM y el CIAEM, que ahora extendemos a COMAP. Además, sobre todo manifiesta alianzas estratégicas que podrán proporcionar muchos más frutos para las comunidades educativas donde actúan dichas organizaciones. Estoy seguro que esta publicación brindará un recurso muy valioso para la comunidad hispanoparlante de Educación Matemática.

El traductor y los revisores quieren que se mencionen algunas de las decisiones que han tomado en el proceso de la traducción.

Mucho del documento está dividido por niveles académicos en los Estados Unidos. Muchos sistemas en América Latina dividen la educación preuniversitaria de maneras diferentes con términos distintos. En general, hemos traducido *elementary (grados 1 al 5)* como "primaria", *middle grades* como "hasta segundo año de secundaria" y *high school* como "media superior".

En la mayoría de los casos hemos cambiado medidas del sistema en uso en los Estados Unidos a medidas del sistema métrico.

Entre las otras decisiones difíciles que hemos tomado tratando de tener en cuenta diferencias entre países incluyen:

- *messy* – "poco claro"
- *approach* – "enfoque"
- *teacher* – "docente"
- *scaffolding* – "apoyo gradual"
- *gasoline* – "combustible"
- *bean bag* – "bolsa de granos"
- *estate* – patrimonio

Ángel Ruiz
Presidente del *Comité Interamericano de Educación Matemática*
San José, Costa Rica
20 de noviembre 2020

PREFACIO

INTRODUCCIÓN

En 2015, los líderes del SIAM y el COMAP se unieron para producir un reporte que titulamos GAIMME - Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education (Lineamientos para la Evaluación e Instrucción en la Educación en Modelación Matemática). El nombre hace homenaje al excepcional trabajo de la Asociación Americana de Estadística (American Statistical Association) con el impresionante reporte GAISE[1]. Al igual que dicho reporte, nuestra audiencia primaria es usted, el docente. Aunque esperamos que los creadores de sistemas de evaluación y legisladores lean este documento y lo usen durante la toma de decisiones, este reporte ha sido escrito para el docente de aula. Esperamos y tenemos la intención de que estos lineamientos sean de ayuda en la incorporación de la práctica de modelación matemática en sus aulas.

Una razón primordial para la creación de GAIMME fue el hecho de que, a pesar de la utilidad y el valor que existe en demostrar cómo las matemáticas pueden ayudar a analizar y guiar la toma de decisiones ante problemas del mundo real, que no tienen la claridad de los problemas matemáticos tradicionales, mucha gente tiene experiencia limitada con la modelación matemática. Quisimos dibujar una imagen más clara de la modelación matemática como proceso, qué es y qué no es, y señalar cómo la enseñanza de la misma puede madurar a medida que los estudiantes se mueven a través de las franjas de grados educativos, independientemente del conocimiento matemático que pueda ser aplicado.

COMO USAR ESTE DOCUMENTO

Aunque ciertamente esperamos que usted tenga el tiempo y el interés en leer este documento de principio a fin, éste ha sido también escrito para permitir de igual forma una lectura más enfocada. La sección inicial "¿Qué es la modelación matemática?" está destinada a todos los lectores y contiene los argumentos principales sobre la inclusión de la modelación matemática en todos los niveles. Es una introducción necesaria para cada una de las secciones subsecuentes. Después de este capítulo, hay tres secciones enfocadas en los siguientes niveles de grados académicos: preescolar, primaria y secundaria; media superior; y nivel universitario. Naturalmente, como docente, después de "¿Qué es la modelación matemática?" usted deseará continuar a la sección correspondiente al nivel de grados académicos relevante. Sin embargo, le incentivamos a que observe tanto las secciones precedentes como las subsecuentes para tener una idea más clara de cómo el proceso de modelación puede progresar de un nivel académico a otro.

Si bien cada una de las secciones enfocadas en los niveles académicos tiene naturalmente una intención un tanto diferente a las demás, ellas tienen en común elementos importantes. Cada una empieza defendiendo el argumento de la enseñanza de la modelación matemática a ese nivel. Cuando sea relevante, discutiremos de qué forma la enseñanza del proceso de modelación matemática en un nivel particular difiere del tratamiento dado en un nivel anterior. Esto es independiente de los temas matemáticos aplicados a la creación de modelos.

Cada sección contiene tareas ilustrativas. Estas tareas han sido escogidas por una o más de las siguientes razones:

- Son interesantes o importantes para la experiencia del alumno.
- Ejemplifican componentes específicos en el ciclo de modelación.
- Su realización es factible para alumnos reales en aulas reales y en tiempo real.

Dado que la modelación de problemas puede ser sumamente intensa y muchas veces requiere la reexaminación de nuestras suposiciones, puede implicar el uso de tiempo (y páginas) para explorar. Por esta razón, hemos incluido varias de las tareas y explicaciones más extensas en los Apéndices B y C.

En cada sección de nivel de grados académicos, dedicamos tiempo para discutir la enseñanza de las matemáticas a través del proceso de modelación y la enseñanza, en sí misma, de dicho proceso. Adicionalmente, discutimos las características de las evaluaciones adecuadas al tema. Debido a esta estructura puede que usted encuentre ideas duplicadas; esto es intencional. Mientras que existen ciertas diferencias en la forma en que cada uno explica modelación matemática de grado a grado, existe un número de características importantes que son comunes y que merecen ser resaltadas.

Después de las secciones correspondientes a los niveles de grados académicos, volvemos a la pregunta “¿Qué es la Modelación Matemática?” a través de una serie de citas y comentarios realizados por el equipo de autores. Esta sección, destinada a todos los lectores, está incluida para enfatizar el arte y el sabor de la modelación desde la perspectiva de los profesionales y los docentes en matemáticas.

El reporte incluye un Apéndice A de Recursos, diseñado para ejemplificar algunas evaluaciones de modelación y materiales de currículos de uso común. Una discusión sobre qué hace una buena evaluación de modelación está también incluida en la sección de Recursos, en conjunto con una discusión de cómo adaptar evaluaciones para alcanzar diferentes metas de modelación. Concluimos con el Apéndice D, el cual contiene ejemplos útiles de rúbricas y herramientas de evaluación que pueden ser usadas en la enseñanza de la modelación matemática o en la enseñanza de las matemáticas a través de la modelación.

Enlistamos algunas cosas que el reporte GAIMME no es:

- No está pensado como un currículo.
- No contiene una colección completa de problemas de modelación.
- No está designado como una colección de planes de clase para uso inmediato en el aula ni como una colección completa de evaluaciones para el aula.

Más bien, el propósito de estos lineamientos es dar una idea de qué es y qué no es la modelación matemática, así como consejos prácticos sobre cómo enseñar modelación a través de los niveles de grados académicos. Hemos tratado de demostrar la importancia de la modelación matemática y cómo y por qué debe ser una parte esencial de la experiencia matemática de cada alumno a lo largo de su educación.

I. ¿QUÉ ES LA MODELACIÓN MATEMÁTICA?

INTRODUCCIÓN

En el transcurso de la educación matemática del estudiante, la palabra "modelo" es usada de varias formas. Muchas de éstas, ya sean manipulativos, demostraciones, ejemplos a seguir o modelos conceptuales de las matemáticas, son herramientas valiosas para la enseñanza y el aprendizaje. Sin embargo, son diferentes de la práctica de la modelación matemática. La modelación matemática, tanto en el trabajo como en la escuela, usa matemáticas para responder preguntas grandes, poco claras y basadas en la realidad. Al dialogar a través de este reporte con nuestros colegas, tales como docentes, supervisores y formadores de docentes, compartimos nuestra experiencia en el salón de clases de forma que, con el asesoramiento apropiado por parte de los docentes, los estudiantes puedan involucrarse en actividades genuinas de modelación y usar las matemáticas para responder preguntas que encuentren significativas y que mejoren su porvenir.

Los autores de este reporte creen firmemente que la modelación matemática debe ser enseñada en cada etapa de la educación matemática de los estudiantes. Al fin y al cabo, ¿por qué la sociedad nos proporcionaría tanto tiempo para enseñar matemáticas? En parte es porque las matemáticas son significativas por mérito propio, pero más que nada porque las matemáticas son importantes para interactuar con el resto del mundo. Ciertamente, las matemáticas ayudarán a los estudiantes mientras avanzan a lo largo del sistema escolar y dentro del mundo laboral. Pero puede y debe ayudarles en sus vidas diarias y como ciudadanos informados. Es crucial que, a medida que progresen a través de los grados educativos, las experiencias de los estudiantes con la modelación matemática los expongan a una amplia variedad de problemas. Como ejemplos, podemos enlistar las siguientes preguntas:

> ¿Cómo determinamos la precipitación promedio de un estado?
> ¿Cu es el mejor lugar para ubicar una estación de bomberos?
> ¿Qué es un sistema electoral justo?
> ¿Cómo se pueden colgar fotos a lo largo de una escalera para que se vean derechas?

Como se mostrará en secciones subsecuentes de este reporte, los estudiantes pueden aprender a valorar la importancia de la modelación en sus vidas en todos los niveles académicos.

PERO, ¿QUÉ ES LA MODELACIÓN MATEMÁTICA?

En las secciones que se encuentran a continuación brindaremos varios ejemplos de qué es y qué no es la modelación. Daremos una definición de trabajo más detallada de la modelación matemática. Pero por ahora, para resumirlo en breve:

La modelación matemática es el proceso que usa las matemáticas para representar, analizar, hacer predicciones, o bien, brindar una percepción de fenómenos pertenecientes al mundo real.

La mayoría de las definiciones cortas que encontramos enfatizan este aspecto tan importante de la relación entre la modelación y el mundo que nos rodea.

– Usar el lenguaje de las matemáticas para cuantificar fenómenos del mundo real y analizar comportamientos.
– Usar las matemáticas para explorar y desarrollar nuestro entendimiento de los problemas del mundo real.
– Usar un proceso iterativo para la resolución de problemas, en el cual las matemáticas son utilizadas para investigar y desarrollar un entendimiento más profundo.

Consideremos cómo podemos trasladar estos conceptos al salón de clases.

DE ESCENARIOS MATEMÁTICOS, A APLICACIONES, A LA MODELACIÓN DE PROBLEMAS

La modelación matemática puede ser utilizada para incentivar requerimientos curriculares y puede resaltar la importancia y relevancia de las matemáticas en la resolución de preguntas significativas. También puede ayudar a los estudiantes a ganar habilidades transferibles, como es el caso de aquellos hábitos de la mente que se encuentran de forma generalizada a lo largo de la asignatura. Daremos una definición más precisa de modelación matemática en la siguiente sección. Por ahora, nos enfocaremos, a través de ejemplos, a demostrar cómo los elementos de la modelación matemática pueden ser incorporados dentro de los planes de estudio existentes a través de la introducción de pequeños cambios a aplicaciones ya conocidas o a problemas narrativos.

DE NIVEL PREESCOLAR A SEGUNDO AÑO DE SECUNDARIA

En este ejemplo, los alumnos están aprendiendo la habilidad de la suma o adición. Un problema de adición carente de aplicación puede requerir a los alumnos que "calculen la suma de 6 + 3". Un problema verbal puede agregar etiquetas y preguntar a los alumnos cuántos pretzels Memo y Susana tienen en conjunto si Memo tiene seis pretzels y Susana tiene tres.

Mientras que el problema narrativo asocia objetos a la adición, no es un problema de modelación matemática por dos razones. Primero, no tiene un valor intrínseco o significado para los alumnos. Aparte de resolver este problema para la tarea, ¿por qué a los alumnos les importaría cuántos pretzels tienen Memo y Susana? El problema narrativo está cerrado de principio a fin. A pesar de que los alumnos puedan usar unos cuantos enfoques diferentes para llegar a la respuesta, como realizar un dibujo y contar o escribir y evaluar una expresión aritmética, toda la información necesaria está claramente dada y solo hay una solución correcta.

Exploremos la manera en que usted podría transformar este problema narrativo en un problema de modelación matemática y al mismo tiempo involucrar a los alumnos en la suma de números enteros. Para involucrar más a los alumnos con el contexto, podría pedirles que imaginen que están ayudando a empacar un almuerzo para un picnic familiar, y que tienen que determinar cuántos pretzels necesitan empacar. Los alumnos necesitan considerar varias cosas y pueden plantearse a sí mismos muchas preguntas. ¿Cuántas personas hay en la familia y cuántas atenderán al picnic? ¿Cuántos pretzels es probable que coma cada persona? ¿Habrá alguien que tenga restricciones alimentarias que deban ser consideradas? ¿Cuánta comida, además de los pretzels, estará disponible en el picnic?

Los alumnos tendrán que hacer suposiciones acerca del contexto. Su conocimiento acerca de su familia importa y cambia la respuesta a la pregunta. Sin embargo, después que hayan contestado estas preguntas y hecho suposiciones, todavía tienen que sumar los números enteros. El pequeño cambio introducido al hacer que los alumnos piensen en el contexto para determinar qué números sumar, e incluso cuántos números sumar, transforma una pregunta cerrada en abierta. La pregunta revisada invita a los estudiantes a convertirse en parte del contexto, a la vez que se encamina a perseguir el mismo contenido matemático curricular que los alumnos necesitan aprender.

La modelación matemática puede ser usada para motivar los requerimientos curriculares y puede enfatizar la importancia y la relevancia de las matemáticas en la resolución de preguntas significativas.

DE TERCER AÑO DE SECUNDARIA A ULTIMO AÑO DE MEDIA SUPERIOR

En este ejemplo, los estudiantes están aprendiendo cómo escribir ecuaciones y gráficas a través de la pendiente y la intersección con la vertical (eje y). Un problema carente de aplicación puede requerir a los estudiantes que grafiquen la línea con pendiente 2 e intersección con la vertical en el valor 100 y después escribir la ecuación de la línea.

Un primer paso hacia la modelación podría ser la contextualización de este problema:

> Emily trabaja en una tienda donde le pagan 100 dólares americanos (USD) a la semana, más 2 dólares por cada artículo que vende. Anota y grafica una ecuación linear que represente la relación entre el ingreso semanal de Emily y el número de artículos que vende durante una semana.

Un estudiante que lea esta pregunta se puede preguntar, "¿por qué querría hacer esta gráfica?". En esta circunstancia, el intento de contextualizar las matemáticas puede, de hecho, hacer parecer el trabajo matemático completamente irrelevante.

Podemos transformar este problema en uno más abierto y significativo al cambiarlo levemente como sigue:

> Las vacaciones se aproximan y a tu mejor amiga Karen le gustaría ganar algo de dinero para comprar regalos. Ella encontró un trabajo que le pagará 2 USD/h más que el salario mínimo. Otro trabajo ofrece pagarle la mitad del salario mínimo más comisiones en la cantidad de 2 dólares americanos por artículo que ella venda. ¿Cuál trabajo es el mejor? Para ayudar a que Karen entienda tu análisis, incluye una representación útil que le ayude a tomar una decisión.

Los estudiantes tendrán que trabajar un poco más para contestar esta pregunta. Tal vez necesiten indagar cuál es el salario mínimo. Tendrán que pensar cuál es el punto de equilibrio financiero[1], el número de artículos que su amiga tendrá que vender cada hora para ganar el salario mínimo. Después, tendrán que pensar si es posible que Karen pueda vender esa cantidad de artículos, lo cual, probablemente, dependa del artículo y de su personalidad. Investigar sobre el contexto y las suposiciones sobre el mismo son componentes de la modelación matemática.

Sus opiniones importan e influencian la respuesta a la pregunta.

Sin embargo, no es suficiente que los estudiantes respondan esta pregunta. Un estudiante que es reacio al riesgo puede aconsejar a Karen que tome el primer trabajo porque la paga es decente y está garantizada. Por otro lado, un estudiante proclive al riesgo puede aconsejarle que tome el segundo trabajo por la posibilidad de generar mucho más dinero. Determinar el punto de equilibrio es solo un aspecto de esta pregunta. Los estudiantes tendrán que pensar en la toma de decisiones de cara a la adversidad. Sus opiniones importan e influencian la respuesta a la pregunta. Aún tienen que hacer la misma matemática para responder la pregunta, pero están forzados a reconciliar su respuesta con la realidad, haciendo las matemáticas más relevantes e interesantes. Hacer juicios acerca de qué es importante y evaluar la calidad de la solución son componentes de la modelación matemática.

A NIVEL UNIVERSITARIO

Al principio de un curso de cálculo de primer semestre, los estudiantes frecuentemente aprenden a aproximar la derivada al calcular el cociente diferencial $[f(x + h) - f(x)]/h$, usando valores decrecientes de h. Por ejemplo, un problema de un libro de texto puede asumir que los estudiantes saben el cociente diferencial y puede estar escrito de esta forma:

> Aproxima la derivada de la función $f(x) = x^3e^x$ en el punto $x = 2$ a través del cálculo del cociente diferencial cuando $h = 0.1$, $h = 0.01$ y $h = 0.001$.

Podemos transformar este tipo de problema en un problema aplicado al añadir contexto. Podemos incluso presentar información basada en datos reales:

> El gradiente adiabático puede ayudar a identificar las masas de aire inestables y es particularmente importante para el vuelo de aeronaves no tripuladas. El gradiente adiabático, γ, es definido como el índice bajo el cual la temperatura disminuye mientras la altitud aumenta, o $\gamma = -dT/da$, donde T es la temperatura y a es la altitud. La temperatura de la atmósfera sobre Little Rock, Arkansas, en un día típico de octubre ha sido medida y está dada aproximadamente por la siguiente función:
> $T(a) = 24.3 - 5.81a + 0.295a^2 - 0.057a^3 + 0.0024a^5 + 0.006\cos(a)$, donde T está dada en grados centígrados y a está dada en kilómetros.

[1] Punto de equilibrio financiero: cuando los ingresos alcanzan el punto en que se cubren todos los costos fijos y variables. En otras palabras, es el momento en que no hay ganancias ni pérdidas en el esquema de un negocio.

> Aproxima el gradiente adiabático a una altura de 11 km a través del cálculo del cociente diferencial cuando $h = 0.1$, $h = 0.01$, y $h = 0.001$.

A pesar de que el problema aplicado ofrece contexto, este no brinda la oportunidad para que los estudiantes incluyan su análisis dentro del contexto, para dar una respuesta más amplia. Éste sigue siendo un problema cerrado. Una pregunta de modelación matemática debe forzar a los estudiantes a tomar responsabilidad sobre algunas decisiones a lo largo del camino. A continuación, se muestra una forma con la cual el problema anteriormente narrado puede ser modificado para convertirlo en un problema de modelación, y al mismo tiempo hacer que los estudiantes se involucren con la idea de usar cocientes diferenciales para aproximar una derivada.

> El gradiente adiabático puede ayudar a identificar las masas de aire inestables y es particularmente importante para el vuelo de aeronaves no tripuladas. El gradiente adiabático, γ, es definido como el índice bajo el cual la temperatura disminuye mientras la altitud aumenta, o $\gamma = -dT/d\textit{a}$ donde T es la temperatura y *a* es la altitud. La temperatura de la atmósfera sobre Little Rock, Arkansas, en un día típico de octubre ha sido medida y está dada aproximadamente por la siguiente función:
> $T(a) = 24.3 - 5.81a + 0.295a^2 - 0.057a^3 + 0.0024a^5 + 0.006\cos(a)$, donde T está dada en grados centígrados y a está dada en kilómetros.
> Se te ha pedido que evalúes la seguridad de una misión potencial de vigilancia usando un dron sobre la ciudad de Little Rock. Se pretende que el dron vuele a una altura aproximada de 11 km por encima de la ciudad, aunque la misión podría ser cumplida con cualquier altitud entre 9 km y 15 km. Definitivamente, tu dron puede volar sin riesgo si el gradiente adiabático es menor que 6°C/km; si el gradiente adiabático sobrepasa 8°C/km, tu dron tendría que aterrizar por razones de seguridad. Usando tus conocimientos sobre cocientes diferenciales, evalúa la seguridad de la misión y ofrece un juego completo de recomendaciones a tu supervisor junto con cualquier suposición que hayas hecho para completar tu análisis.

A diferencia del problema aplicado, esta versión modelada no les indica a los estudiantes que valores usar para *h*. Ellos deben escoger un valor razonable por sí mismos. Tal vez, al explorar valores, internalicen la idea de que la aproximación mejora con valores decrecientes de *h*, preparándolos para la definición de límite de la derivada.

Esta versión modelada del problema también hace que los estudiantes interpreten sus resultados matemáticos en el contexto de la seguridad de la misión con un dron, mientras que obtienen conclusiones y hacen recomendaciones basadas en estos resultados. En caso de que obtengan una conclusión matemática que caiga entre las zonas segura y de peligro, tendrán que tomar decisiones acerca de cómo proceder, como la exploración de otras altitudes posibles para la misión. Independientemente de lo que los estudiantes decidan, necesitan justificar estas decisiones, lo que requiere que realmente se apropien del procedimiento matemático que los encamina al resultado final.

FIGURA 1.1: UNA FORMA DE TRANSFORMAR UN PROBLEMA MATEMÁTICO EN UN PROBLEMA DE MODELACIÓN.

Como se demuestra en los ejemplos anteriores, específicos para los tres niveles de grados académicos, un problema matemático puede ser transformado en un problema de modelación. Es importante observar que añadir etiquetas como "pretzels" no es suficiente. Algo obvio, pero igualmente importante es que tal vez añadir contexto y significado, como es la introducción de trabajos y salarios o gradiente adiabático y drones, tampoco es suficiente. Un problema de modelación debe también dar lugar a que los estudiantes interpreten el problema y tengan opciones en el proceso de solución. Estas ideas sobre como transformar preguntas son ilustrados en la Figura 1.1.

EL PROCESO DE MODELACIÓN

Para el propósito de este reporte, diremos que la modelación matemática es un proceso construido con los siguientes componentes:

IDENTIFICAR EL PROBLEMA

Identificamos algo en el mundo real que queramos saber, hacer o entender. El resultado es una pregunta situada en el mundo real.

HACER SUPOSICIONES E IDENTIFICAR VARIABLES

Seleccionamos 'objetos' que parezcan importantes para las cuestiones planteadas en el mundo real e identificamos relaciones entre ellos. Decidimos qué características de los objetos y sus interrelaciones conservaremos y cuáles ignoraremos. El resultado es una versión idealizada de la pregunta original.

HACER LOS CÁLCULOS

Traducimos la versión idealizada en términos matemáticos y obtenemos una formulación matemática de la pregunta. Esta formulación es el modelo. Realizamos operaciones matemáticas para observar qué conocimientos y qué resultados obtenemos.

ANALIZAR Y EVALUAR LA SOLUCIÓN

Consideramos lo siguiente: ¿Esto aborda el problema? ¿Tiene sentido cuando se lleva de regreso al mundo real? ¿Son estos resultados prácticos, la respuesta razonable y las consecuencias aceptables?

ITERAR

Repetimos el proceso cuantas veces sea necesario para refinarlo y extender nuestro modelo.

IMPLEMENTAR EL MODELO

Reportamos nuestros resultados a otros e implementamos la solución para generar aplicaciones que tengan lugar en el mundo real.

La modelación matemática es vista frecuentemente como un ciclo, dado que continuamente necesitamos regresar al inicio para hacer nuevas suposiciones y acercarnos a un resultado útil. No obstante, usaremos la representación a continuación, dado que refleja el hecho de que, en la práctica, un modelador se mueve frecuentemente de una etapa a otra de la modelación matemática:

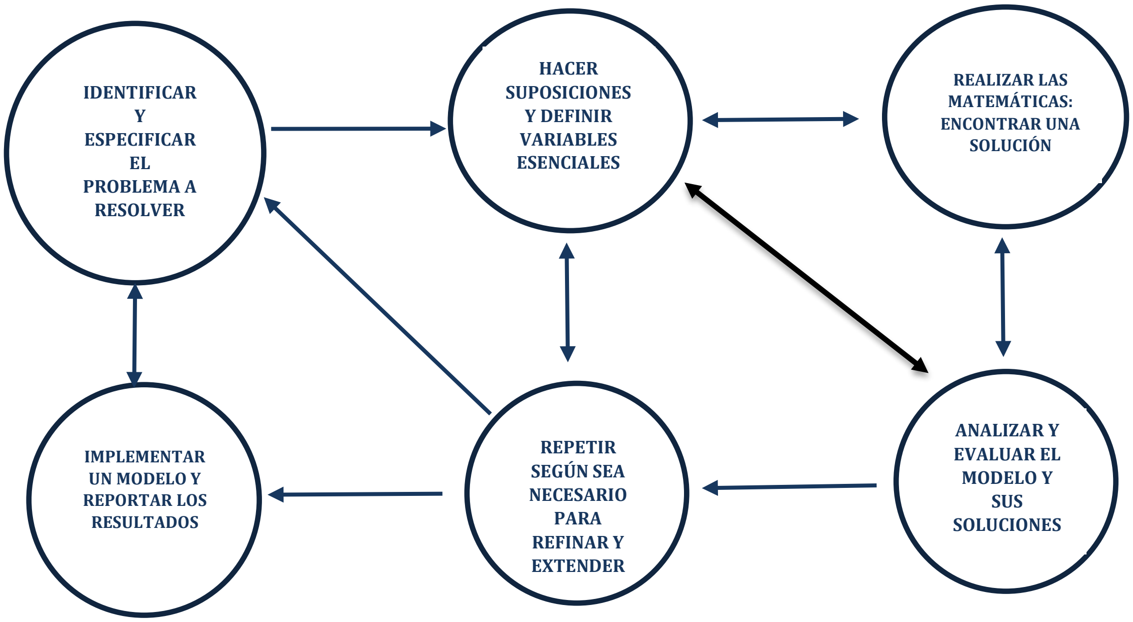


FIGURA 1.2: EL PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Note que, como se muestra en la figura, el proceso de modelación contiene componentes cíclicos y que no todas las flechas son unidireccionales. Como tal, hemos intencionalmente omitido el término 'pasos' y no hemos numerado los componentes del proceso de modelación. No queremos implicar que existe un número ordenado de pasos a seguir que garantice encontrar una solución para un problema de modelación. Por el contrario, algunos componentes ocurren de forma paralela y otros son repetidos según sea necesario. Observaremos algunos de estos matices en los ejemplos a continuación y otros que se encuentran destacados en los ejemplos de los Apéndices.

Ésta será nuestra definición de trabajo a través de este reporte. Sin embargo, mantendremos en mente que existe un componente artístico en la modelación, discutido más a detalle en el Capítulo 5, y en la enseñanza de la misma, algo que realmente esperamos plasmar mientras exploramos la implementacion a través de los niveles de grados educativos.

EL PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN ACCIÓN

Tal vez la mejor forma de discutir los componentes del proceso de modelación es a través de ejemplos. Aunque nos enfoquemos solamente en piezas del proceso de modelación en momentos particulares en nuestra aula, es importante tener conciencia de cómo estos componentes encajan dentro del proceso total de modelación. El entendimiento de cómo funciona el proceso como un todo puede informar el modo bajo el cual brindamos apoyo a los estudiantes para involucrarse en algún pequeño subconjunto del proceso. A la larga, esperamos que los estudiantes sean capaces de usar este proceso de modelación para abordar preguntas grandes, realistas y complicadas cuyas respuestas realmente importen. Ayudar a los estudiantes a construir confianza en su habilidad de completar componentes individuales del proceso de modelación significa que, algún día, podrían estar menos intimidados a involucrarse en el proceso como un todo.

Es fundamental notar que *los problemas de ejemplo NO deben de ser usados como una plantilla* para todos los problemas de modelación. Los problemas del mundo real no se presentan todos de la misma forma, así que lo mejor que podemos hacer (¡por nosotros mísmos y por los estudiantes!) es enfocarnos en el proceso y no en el contenido concreto presentado aquí. En las siguientes secciones específicas para los niveles de grados académicos, podrá encontrar más ejemplos de preguntas apropiadas para cada nivel, así como discusiones acerca de su papel como docente a través de este proceso.

PROBLEMAS DEL MUNDO REAL

Considere el siguiente ejemplo que incluye un cuestionamiento que mucha gente se formula a sí misma diariamente.

> El precio del combustible cambia casi a diario y no todas las estaciones de combustible ofrecen el mismo precio por litro. La estación que vende el combustible más barato puede encontrarse atravesando la ciudad, en otro punto de la ciudad de donde usted se encuentre manejando. ¿Valdría la pena atravesar la ciudad manejando para comprar combustible más barato? Genere un modelo matemático que pueda ser usado para ayudar a entender bajo que condiciones vale la pena conducir hasta allá.

Tal vez su reacción inicial a esta pregunta sea que no se le ha dado suficiente información para contestar la pregunta. ¡Ese es precisamente el punto! La mayoría de los problemas verbales que los estudiantes encuentran les dan toda la información que necesitan para contestar la pregunta, pero ese no es el tipo de problemas que los estudiantes podrían encontrar cuando entren al mundo laboral. No es irreal imaginar al futuro jefe de un estudiante preguntando por una solución para alcanzar una meta de la forma más segura, oportuna y rentable, y que además para este problema, el empleado tenga que identificar la información que necesite para tratar de localizarla en el proceso de contestar dicha pregunta. De forma similar, la ambigüedad intencional de la pregunta de modelación planteada prepara a los estudiantes para pensar sobre la información que necesitan para poder responder la pregunta.

Trazaremos ahora el razonamiento de un equipo hipotético de estudiantes, llamado Equipo A, mientras trabajan la resolución de este problema de combustible. Dado que el proposito de este ejemplo es resaltar el proceso de modelación, presentamos un trabajo particularmente bueno, por lo que el desempeño que veremos por parte del Equipo A es representativo de un grupo fuerte de estudiantes de media superior con experiencia en modelación. Ellos demostrarán tanto persistencia como autocorreción, y producirán una solución premeditada, aunque imperfecta. Nótese que no juzgaremos la calidad de sus suposiciones y sus decisiones. En lugar de eso, los miembros del Equipo A realizarán su propia evaluación en el componente de análisis y evaluación del modelo, pertenciente al proceso de modelación.

CONSTRUYENDO EL MODELO: DEFINIR EL PROBLEMA, REALIZAR SUPOSICIONES Y DEFINIR VARIABLES

El Equipo A necesita transformar la pregunta, "¿valdría la pena atravesar la ciudad manejando para comprar combustible más barato?" en una pregunta manejable y bien definida que pueda contestar. Algunas suposiciones llegarán a los estudiantes fácilmente, y la definición de variables seguirá de forma natural. El equipo no se dispone a trabajar con una imagen del proceso de modelación para avanzar de forma consciente, a lo largo de cada uno de sus componentes. En lugar de eso, hacen algo de investigación e intercambian ideas, por lo que el proceso de construcción del modelo se da orgánicamente. Ellos toman notas a lo largo de estas conversaciones preliminares, y con ellas capturan los componentes resultantes del modelo que han desarrollado.

En un esfuerzo por comprender el problema, el Equipo A empieza inmediatamente a buscar información. Escogen la ruta que uno de ellos toma para llegar a casa y que pasa por una estación de combustible, a la que llamaremos Estación 1. Una búsqueda rápida en internet arroja precios de combustible en estaciones cercanas y ellos anotan el precio del combustible, USD 0.95/litro, en la Estación 1. Después buscan otras estaciones de combustible y escogen una, a la que llamaremos Estación 2, la cual tiene el precio más barato de combustible, a USD 0.90/litro.

Posteriormente, deciden que para hacer una comparación justa, necesitan comprar cantidades iguales de combustible. Escogen arbitrariamente que necesitarán comprar 50 litros de combustible. Después escriben lo siguiente:

Costo del combustible en Estación 1 = (USD 0.95/litro) • 50 litros = USD 47.50
Costo del combustible en Estación 2 = (USD 0.90/litro) • 50 litros = USD 45.00
Ahorro comprando en la Estación 2 = USD 47.50 – USD 45.00 = USD 2.50

Por lo tanto, comprar combustible en la estación que cobra menos es USD 2.50 más barato.

Entonces, un estudiante se da cuenta de que esto no contesta realmente la pregunta, y que necesitan considerar el costo añadido del traslado a la Estación 2.

Otro estudiante hace inmediatamente otra búsqueda de internet y determina que la distancia entre las estaciones de combustible es de 10 kilómetros. Necesitan resolver cuánto costará pagar por el combustible que gastarán viajando 10 kilómetros a la Estación 2 y 10 kilómetros de regreso.

Un miembro del equipo reporta una conversación con su padre acerca de un carro deportivo que le gustaba. Su papá dijo que era un auto excelente, pero que no tenía buen kilometraje. Su padre dijo que su carro rendía alrededor de 15 kilómetros por litro, mientras que el carro deportivo probablemente rendía 6 kilómetros por litro. El equipo se da cuenta, al observar las unidades en cuestión, que, si dividen los 20 kilómetros entre el consumo de combustible, tendrían el número de litros de combustible necesarios para viajar los 20 kilómetros. Entonces, escriben:

$$\text{(Costo de manejar 20 kilómetros)} = \frac{\text{20 kilómetros}}{\text{15 kilómetros /litro}}$$

$$= \text{1.33 litros}$$

Tan pronto como lo anotan, se dan cuenta de que están olvidando algo. Corrigen su trabajo multiplicando su resultado anterior por el costo del combustible en la Estación 2, donde bajo su raciocinio estarán si viajan esos 20 kilómetros extra, obteniendo a continuación:

$$\text{(Costo de manejar 20 kilómetros)} = \frac{\text{20 kilómetros}}{\text{15 kilómetros /litro}} \bullet \frac{\text{USD 0.90}}{\text{litro}}$$

$$= \text{1.33 litros} \bullet \frac{\text{USD 0.90}}{\text{litro}}$$

$$= \text{USD 1.20}$$

Concluyen ahora que es claro que manejar los 202 kilómetros extra cuesta USD 1.20, pero entonces no pueden ahorrar USD 2.50 cuando compran el combustible. Por ende, ahorran USD 1.30 manejando al otro lado de la ciudad, a la Estación 2.

Para este momento, el Equipo A piensa que ha contestado la pregunta. En efecto, han hecho el trabajo sustancial. Han decidido qué factores importan y han encontrado formas para relacionar las cosas que ellos conocen con lo que quieren saber.

Sin embargo, cuando regresan a leer la pregunta, se dan cuenta de que solamente la han respondido para un caso muy específico. Usaron valores particulares para el precio del combustible en cada estación, la distancia específica entre dos estaciones particulares y el consumo de combustible de un vehículo específico. No obstante, su trabajo anterior no es un desperdicio. Necesitan solamente generalizar lo que ya han realizado. Ellos regresan a su trabajo y ahora usan las variables para representar cantidades.

Al finalizar su discusión, el Equipo A ha anotado el siguiente resumen de su trabajo.

DEFINIR EL PROBLEMA

Determinar qué cuesta más:

- Comprar en la Estación 1, la cual está en la ruta planificada, o
- Desviarse de la ruta hacia la Estación 2, la cual vende combustible a un precio más barato, para comprar combustible ahí.

SUPOSICIONES

- El combustible cuesta menos en la estación que está fuera de nuestra ruta.
- El consumo de combustible del carro permanece constante.
- Si escogemos salir de la ruta, consideraremos el costo añadido del kilometraje entre la estación de combustible a la que hubiéramos ido y la estación más lejana y de regreso.
- Compraremos la misma cantidad de combustible, no importa que estación escojamos.

DEFINIR VARIABLES

- Que *m* sea el número de kilómetros entre la Estación 1 y la Estación 2
- P1, el precio del combustible en la Estación 1, en dólares por litro
- P2, el precio del combustible en la Estación 2, en dólares por litro
- f, el consumo de combustible del carro, en kilómetros por litro
- n, el número de litros de combustible a ser comprados
- T, el costo de viajar a y desde la Estación 2, en dólares
- S, la diferencia en dinero pagado por comprar el combustible en la Estación 2 versus la Estación 1, tomando en cuenta solo la compra de combustible sin incluir el costo del viaje, en dólares.

MODELO RESULTANTE DEL EQUIPO A

- $S = (P1 - P2) \cdot n$
- $T = (P2 \cdot 2m) / f$
- Si $S > T$, entonces es mejor atravesar la ciudad manejando para comprar combustible en la Estación 2.
- Si $S <= T$, entonces no deberíamos atravesar la ciudad manejando para comprar combustible.

ENCONTRANDO UNA SOLUCIÓN

De cierta forma, el Equipo A ya había encontrado una solución usando valores específicos. Sin embargo, esto ciertamente los hizo abordar preguntas más grandes y profundas. Por ejemplo, si todo permaneciera igual, ¿qué tan lejos tendría que estar la Estación 2 para que el costo fuera el mismo? En otras palabras, ¿en qué condiciones es S = T? O bien, ¿para qué valores (P1 – P2) • n = (P2 • 2m) / f? Si usamos valores conocidos para todas las variables exceptuando la distancia m, podemos contestar la pregunta. El Equipo A podría anotar lo siguiente:

> (P1 – P2) • n = (P2 • 2m) / f,
> (USD 0.95 – USD 0.90) • 50 litros = (USD 0.90 • 2m) / (15 kilómetros/litro),
> m = 20.83 kilómetros

Lo que significa que, para los supuestos precios del combustible, consumo de combustible y número de litros a comprar, si la Estación 2 está a menos de 20.83 kilómetros fuera de la ruta, vale la pena el viaje, pero si está a más de 20.83 kilómetros fuera de la ruta, es mejor solo pagar el precio más alto en la estación más cercana.

Otro estudiante se pregunta si tendría más sentido pensar sobre qué tan grande debería ser la diferencia de precios para que el viaje a la Estación 2 valiera la pena. Básicamente, esto significa usar valores conocidos para todas las variables excepto P2 en la misma ecuación, (P1 – P2) • n = (P2 • 2m) / f, y después despejar P2.

Otro estudiante propone que pueden buscar el precio del combustible y la distancia entre estaciones de combustible. Tal vez tiene más sentido ver cuántos litros de combustible se tendrían que comprar para que valga la pena manejar a través de la ciudad por combustible. Esto es solo otra reestructuración de la misma ecuación.

Después de esta fértil discusión, el Equipo A puede ver finalmente el poder del enfoque de modelación. Su modelo permite no solo responder la pregunta acerca de "si vale la pena" para la situación actual, sino que también les permite atacar preguntas más amplias sobre el "punto decisivo" que causaría que una persona salga de su ruta planeada para comprar combustible.

ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO

El Equipo A reflexiona ahora sobre si su modelo es el apropiado para contestar la pregunta original. Ésta es una lista de algunas de las preguntas que ellos pueden hacerse:

- ¿El signo de nuestra respuesta es correcto? Por ejemplo, ¿los estudiantes querrían ahorrar una cantidad positiva de dinero?
- ¿Está mal nuestra respuesta por orden de magnitud? Por ejemplo, los estudiantes estarían preocupados si encontraran que tienen que comprar un millón de litros de combustible para hacer que el viaje valga la pena.
- ¿Se comporta nuestro modelo de forma apropiada cuando se incrementan o disminuyen las variables iniciales? Por ejemplo, si mantenemos todo lo demás constante, pero disminuimos el valor de m, el número de kilómetros entre estaciones, ¿observamos una disminución en T, el costo de viajar los kilómetros añadidos?
- ¿Son razonables y justificables nuestras suposiciones?
- ¿Son relevantes nuestras suposiciones?
- ¿Nuestro modelo se deduce de nuestras suposiciones? ¿Nuestro modelo se explica completamente por nuestras suposiciones o necesitamos añadir más?

FIGURA 1.3: POR QUÉ LA SUPOSICIÓN INICIAL DEL EQUIPO A SOBRE LA DISTANCIA AÑADIDA DEBE DE SER REVISADA

- ¿Qué ocurre si nuestras suposiciones no son correctas? ¿Qué impacto tiene en nuestra respuesta?
- ¿Qué pasa si nuestro escenario cambia un poco? ¿Nuestros resultados cambian mucho o poco?

Un miembro del equipo empieza a reflexionar sobre la suposición que hicieron acerca de la distancia añadida para ir a la estación de combustible más lejana. Ella sabe dónde se localizan las estaciones de combustible y hace un dibujo, como se muestra en la Figura 1.3, demostrando así que la distancia añadida es mucho menor que lo que actualmente están usando. Todos llegan a la conclusión de que la distancia entre las estaciones de combustible no es lo que realmente deben medir. Su suposición inicial tomaba en cuenta la distancia total, 9 kilómetros, entre la Estación A y la Estación B. Para la instancia específica que se muestra en la Figura 1.3, necesitan solo tomar en cuenta los 6 kilómetros desde la ruta de la Escuela a la Casa hasta la Estación B.

Revisan sus suposiciones y el modelo para reflejar este cambio, reconsiderando los componentes de construcción del modelo y creando otra repetición de su modelo.

REPORTANDO LOS RESULTADOS

El Equipo A se siente confiado en su revisión del modelo y se está preparando para reportar sus resultados. Su reporte usará símbolos y diagramas cuando sea necesario para explicar su trabajo. Los símbolos y ecuaciones estarán íntimamente conectados con el proceso que los llevó a estos, y serán virtualmente insignificantes sin explicación, por lo que saben que su narrativa es también muy importante. El equipo usa esta oportunidad para defender las suposiciones que los llevaron a su modelo, con el objetivo de infundir confiabilidad en el mismo.

Un miembro del equipo discute el proyecto con su madre, cuya reacción visceral es “no hay forma de que conduzca 20 kilómetros fuera de mi ruta para ahorrar USD 1.30. Es una pérdida de tiempo.” El valor del tiempo de una persona es algo que el equipo ni siquiera consideró cuando llegaron a su solución. De hecho, el modelo del Equipo A sugiere que manejar fuera de la ruta vale la pena incluso cuando el ahorro es solo 1 centavo.

El miembro del equipo se alarma y contacta a sus compañeros, preocupada de que hayan fallado al contestar la pregunta y de que tienen que entregar el reporte al día siguiente. Otro compañero le recuerda que todos los modelos tienen fortalezas y debilidades. Lo que es importante es que hayan identificado estas fortalezas y debilidades en su reporte. Esas debilidades pueden ser incluidas como futuros desarrollos de su trabajo.

Toda esta discusión sobre si el equipo ha contestado realmente la pregunta de "si vale la pena" inspira un pensamiento en otro estudiante, quien reconoce que no tomaron en cuenta ninguna consideración ambiental. ¿Deberían incluir información sobre la responsabilidad con respecto al medio ambiente al manejar 20 kilómetros solo para ahorrar USD 1.30? De nuevo, el equipo acuerda que el modelo podría ser revisado para contemplar los costos ambientales como la compensación de emisiones de carbono y que podrían ser incluidos en trabajos futuros.

Note que, con las preguntas abiertas, los estudiantes pueden llegar a modelos completamente diferentes.

Hemos visto ya como el proceso de modelación funciona a través de un ejemplo de cómo un equipo enfrentó un problema. Tenga en cuenta que no se puede usar este ejemplo como plantilla porque cada pregunta inspira una línea de pensamiento diferente y cada estudiante o grupo de estudiantes traerá diferentes ideas, habilidades naturales e información acerca del problema al proceso de modelación. En cuanto a los problemas de modelación, este problema estaba todavía bastante estructurado. Por ejemplo, el enunciado del problema indicaba que los precios del combustible y la distancia a las estaciones de combustible importan. El Equipo A fue capaz de desarrollar una solución razonable mientras consideraba varios factores importantes. En el Apéndice C, revisamos el mismo problema para ver otros enfoques.

Note que, con las preguntas abiertas, los estudiantes pueden llegar a modelos completamente diferentes, los cuales son todos válidos, aunque resulten en diferentes respuestas. Como tales, las suposiciones y el razonamiento que llevan a un modelo son tan importantes como los resultados mismos.

PRINCIPIOS GUÍA

Los siguientes capítulos describirán las mejores prácticas para docentes que apoyan la modelación matemática. En todos los niveles de grados académicos, el docente tiene múltiples papeles, incluyendo:

- Seleccionar y/o desarrollar problemas de modelación,
- Anticipar como los estudiantes tratarán de contestar la pregunta,
- Desarrollar un enfoque de facilitación como corresponda,
- Organizar y dar orden de partida a los estudiantes, y
- Proporcionar aliento y guía a los estudiantes.

Cerramos este capítulo introductorio ofreciendo un juego de principios docentes para la travesía de implementar modelación matemática en el salón de clases.

LA MODELACIÓN (COMO LA VIDA MISMA) ES ABIERTA Y COMPLICADA

Podría parecer buena idea ayudar a los estudiantes desglosando el problema para que puedan ver inmediatamente cuales son los factores importantes por considerar. Sin embargo, hacerlo así les impide que lo hagan por sí mismos y les roba el sentimiento de involucramiento y logro en su trabajo.

CUANDO LOS ESTUDIANTES ESTÉN MODELANDO, DEBEN TOMAR DECISIONES GENUINAS.

Los mejores problemas incluyen la toma de decisiones sobre cosas que importan a los estudiantes y los hacen ver cómo el uso de las matemáticas puede ayudarles a tomar buenas decisiones.

EMPIEZA EN GRANDE, EMPIEZA CON POCO, SIMPLEMENTE EMPIEZA.

Después de leer este reporte, puede ser que usted se sienta listo para entrar y hacer grandes cambios, y si es así, ¡genial! Sin embargo, incluso cambios pequeños en las cosas que ya hace en el salón de clases pueden motivar a los estudiantes a involucrarse en la modelación matemática.

LA EVALUACIÓN DEBE ENFOCARSE EN EL PROCESO, NO EN EL PRODUCTO.

Los modelos matemáticos, y los resultados que producen, están íntimamente conectados con las suposiciones hechas durante la creación de los mismos. La evaluación debe estar al servicio de ayudar a los estudiantes a mejorar sus habilidades de modelación, que con el tiempo se traducirán en un mejor producto.

LA MODELACIÓN NO OCURRE EN AISLAMIENTO

Ya sea que los estudiantes trabajen en equipos, compartiendo ideas con toda la clase o buscando en línea para investigar o recolectar datos, la modelación no se trata de trabajar en el vacío. Los problemas son desafiantes y ayuda saber que se tiene apoyo en la búsqueda de respuestas.

2. MODELACIÓN MATEMÁTICA EN PRIMARIA Y MEDIA: PREESCOLAR HASTA SEGUNDO AÑO DE SECUNDARIA

INTRODUCCIÓN

La modelación matemática es un proceso, como se explica en el Capítulo 1. El objetivo de este capítulo es exponer cómo este proceso se desarrolla con estudiantes de preescolar hasta segundo año de secundaria. Este es un vistazo de cómo la modelación matemática puede encajar adecuadamente en estos niveles académicos, acompañado de ideas para facilitar y evaluar el trabajo de modelación de los estudiantes. Concluimos con la concientización de cómo los principios guía informan el trabajo con estudiantes en grados elementales.

Los cinco principios guía del Capítulo 1 coinciden tanto con las prácticas docentes efectivas como con las creencias productivas, como se describe en el *documento De los principios a la acción* del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM; National Council of Teachers of Mathematics)[1]. La práctica de la modelación matemática es consistente con el estándar *CCSS.Math.Practice.MP4 Modela con Matemáticas,* las demás prácticas matemáticas de CCSSM (Common Core State Standards for Math; *Estándares Estatales Comunes de Matemáticas*), así como con los estándares para las artes de lenguaje[2]. Por supuesto los estándares individuales del contenido matemático pueden ser satisfechos, pero esto dependerá ampliamente de la tarea en cuestión. De forma similar, las habilidades para el siglo XXI de creatividad e innovación, pensamiento crítico y resolución de problemas, comunicación y colaboración del P21 (Partnership for 21st Century Learning; *Asociación para las Habilidades del Siglo XXI*)[3] son accesibles a través de la modelación.

Muchos de nosotros hemos oído a los estudiantes preguntar, “¿cuándo vamos a usar esto?” en referencia a su trabajo matemático. Dado que la modelación matemática enfrenta problemas grandes, poco claros y realistas, esto ayuda a los estudiantes a vincular a las matemáticas con la vida diaria y los empodera para utilizarla en la resolución de problemas relevantes.

Idealmente, podemos descubrir problemas que sean importantes para nuestros estudiantes, como aquellos que tengan lugar en la comunidad o en la escuela.

Entender cómo los estudiantes desarrollan su habilidad para hacer modelación matemática es una tarea desafiante. Existen estudios útiles sobre modelación matemática ya publicados, pero esta área aún no ha sido explorada tan profunda y sistemáticamente como otras, tales como conteo, operaciones con números enteros, fracciones y razonamiento proporcional. Actualmente, podemos combinar resultados de investigación existente, expectativas expresadas en estándares curriculares y experiencias en numerosos salones de clases para sugerir formas generales con las cuales los estudiantes, en su papel de modeladores matemáticos, puedan progresar desde preescolar hasta segundo año de secundaria mientras practican componentes del proceso de modelación.

VENTAJAS DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN PREESCOLAR HASTA SEGUNDO AÑO DE SECUNDARIA

El periodo desde preescolar hasta segundo año de secundaria proporciona un escenario natural para la modelación matemática con muchas ventajas, como son el aprovechamiento y la conservación de la disposición positiva e inquisitiva de los niños y facilitar la enseñanza y la evaluación del aprendizaje matemático de otro contenido curricular, así como de ideas extracurriculares. Cada una de estas ventajas es abordada a continuación.

APROVECHANDO Y CONSERVANDO LA CURIOSIDAD

LOS ESTUDIANTES ESTÁN ACOSTUMBRADOS A SER CREATIVOS.

¡Los niños son maravillosos! Su curiosidad y actitud fresca hacia el mundo llama nuestra atención. Su disposición a explorar su entorno, hacer preguntas y probar cosas nuevas, incluyendo aquellas que tal vez no nos habríamos imaginado, brinda una oportunidad perfecta para involucrarlos en la modelación matemática. La naturaleza abierta de los problemas de la modelación matemática incita la creatividad de los estudiantes, así como la posibilidad de tomar decisiones[4]. Puede ser que algunos estudiantes no piensen en las matemáticas como una materia en la que puedan ser creativos. Sin embargo, esperamos que al involucrarlos en esfuerzos más creativos durante el tiempo destinado a las matemáticas podamos ampliar el grupo de estudiantes que continúan su entrenamiento matemático.

LA MOTIVACIÓN Y DISPOSICIÓN HACIA LAS MATEMÁTICAS ES MAYOR EN PRIMARIA.

Modelar desde preescolar hasta el segundo año de secundaria es una forma de desarrollar y mantener la disposición positiva de los estudiantes hacia las matemáticas. Los niños desarrollan frecuentemente la idea equivocada de que una solución rápida es la mejor y de que todo problema tiene solo una respuesta correcta[5]. Las actividades de modelación pueden ayudar a los estudiantes a disipar o desmentir estas ideas improductivas acerca de las matemáticas, así como promover la persistencia durante la resolución de problemas e incrementar la comodidad con la existencia de varias respuestas válidas[6]. Además, se ve una oportunidad para proporcionar a los estudiantes una métrica más sofisticada para evaluar la validez y utilidad de las estrategias de resolución de problemas y de las soluciones. Creemos firmemente que, al involucrar a los estudiantes en la modelación desde los grados elementales, éstos crecerán considerando a las matemáticas como cautivadoras y fundamentales, así como una forma útil de aproximarse a la toma de decisiones y a problemas críticos de la vida.

LOS ESTUDIANTES DE PRIMARIA Y MEDIA TIENEN EL POTENCIAL DE DESARROLLAR FLUIDEZ COMO COMUNICADORES, PENSADORES Y SOÑADORES DE LAS MATEMÁTICAS.

Sabemos que los niños pequeños que son expuestos a diferentes lenguajes pueden aprenderlos rápidamente. Nos gustaría ver que los niños tuvieran una exposición similar a las matemáticas y así desarrollar su fluidez en éstas. Para facilitar el desarrollo del lenguaje matemático, necesitamos que los estudiantes se comuniquen entre ellos y con aquellos que hablan con fluidez el lenguaje de las matemáticas. Como docentes, podemos esforzarnos para profundizar continuamente en nuestra propia fluidez matemática y refinar nuestras prácticas de modo que podamos mantener expectativas elevadas para nuestros estudiantes[7].

MEJORA DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS, OTRAS MATERIAS Y DE LA MODELACIÓN MISMA

LA MODELACIÓN PUEDE INCENTIVAR EL PROCESO Y LAS HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS.

Los docentes tienen la flexibilidad para determinar en qué medida guiarán a sus estudiantes modeladores hacia herramientas matemáticas específicas. Para cada problema abierto, los estudiantes pueden percatarse de que necesitan una nueva herramienta, por ejemplo, la multiplicación, que es una forma más eficiente de realizar sumas repetidas. Algunas veces los estudiantes podrán escoger una herramienta que les es familiar y evitar ideas más nuevas y desafiantes. En este caso, el docente puede permitir que un equipo use una herramienta conocida para posteriormente preguntarle a sus estudiantes que reevalúen el problema usando una nueva herramienta para determinar si obtienen un resultado similar y comparar estrategias.

LA MODELACIÓN PROMUEVE EL RAZONAMIENTO INTERDISCIPLINARIO TEMPRANO.

Se puede tomar ventaja de que los estudiantes trabajen con un solo docente en diferentes materias o bien, de que sean educados por un equipo de docentes, ya que las lecciones pueden abordar diversos temas simultáneamente a través de las actividades de modelación. En muchos escenarios, los docentes de grados elementales trabajan con sus grupos no solo en matemáticas, sino también en otras áreas académicas y no académicas. Los docentes pueden introducir problemas de modelación matemática a través de preguntas que los niños formulen naturalmente sobre ciencia, estudios sociales, lectura y escritura, arte, educación física o música. Esto puede ocurrir durante las actividades de clase o en otros escenarios. Aunque esta idea parezca naturalmente más acorde con las ciencias, como en el uso de herramientas matemáticas para analizar datos de experimentos científicos, la modelación matemática puede también vincular las herramientas matemáticas con las humanidades. Por ejemplo, a la par que los estudiantes de preescolar hasta segundo año de secundaria desarrollen habilidades de lectura, se les puede pedir que generen un modelo de red compuesto por palabras de tres letras con dos palabras conectadas entre sí si es que difieren en una letra, como se ejemplifica en la figura 2.1. La incorporación de la modelación matemática, y en específico al incentivar a los niños a explorar las preguntas cuantitativas que naturalmente surgen con el uso de herramientas matemáticas

> *Los docentes pueden introducir problemas de modelación matemática a través de preguntas que los niños formulen naturalmente sobre ciencia, estudios sociales, lectura y escritura, arte, educación física o música.*

previamente adquiridas, puede reforzar su entendimiento del material académico y simultáneamente fortalecer su necesidad por las matemáticas.

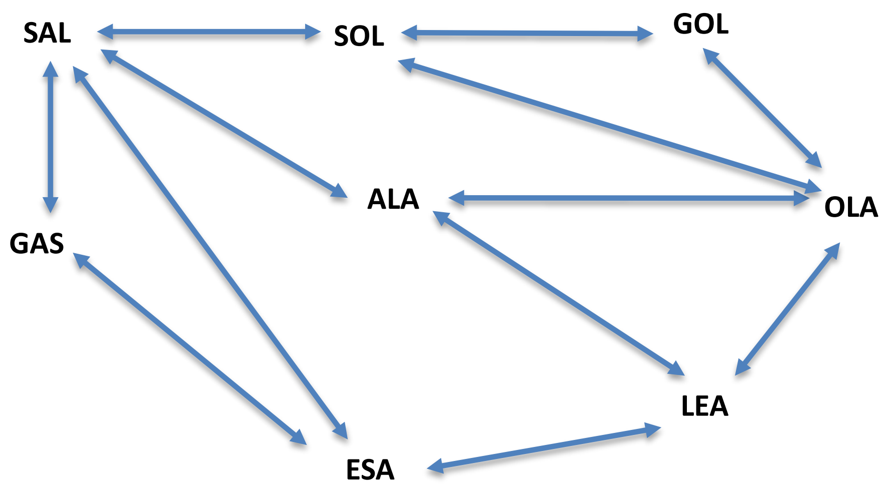


FIGURA 2.1: RED CON UNA SELECCIÓN DE PALABRAS DE TRES LETRAS COMO NODOS Y ESLABONES ENTRE PALABRAS QUE DIFIEREN POR UNA LETRA

Por ejemplo, el libro *Misty of Chincoteague* de Marguerite Henry relata la historia de dos niños que trabajan para poder tener sus propios caballos. La novela está ambientada en la Isla de Chincoteague, Virginia, que es famosa por su caballada de aproximadamente 150 ponis que ha sido mantenida por el cuerpo de bomberos local por más de 90 años. Con la intención de animar a los estudiantes a ser reflexivos, se les puede motivar a realizar preguntas como las siguientes.

¿Por qué hay 150 ponis en la isla?
¿Cuánta agua consumen 150 ponis en una semana?
¿Cuánto terreno necesitan?
¿Cuántos ponis extras podrían vivir en la isla?

Los estudiantes pueden responder a estas preguntas usando mapas, materiales manipulativos, cálculos simbólicos y otras estrategias que elijan. Para simplificar el problema lo suficiente como para abordarlo, puede ser que necesiten hacer suposiciones acerca de la isla y su población. Al aproximarse a tareas de modelación de esta forma, los estudiantes pueden conectar su trabajo y sus herramientas matemáticas con otras disciplinas y entender las matemáticas en su ambiente desde una variedad de perspectivas.

EL TRABAJO EN GRADOS PRIMARIOS Y MEDIOS PUEDE PREPARAR EL TERRENO PARA UNA MODELACIÓN MÁS SOFISTICADA.

Las maneras en las que los estudiantes se involucran en la modelación matemática desde preescolar hasta el segundo año de secundaria cimientan las bases para un proceso de modelación más sofisticado. Por ejemplo, si los estudiantes tienen experiencia identificando y haciendo suposiciones sobre situaciones del mundo real durante sus primeros años escolares, cuando se encuentren con problemas de modelación en años posteriores serán conscientes de que para resolver problemas reales se requiere hacer suposiciones. La exposición temprana a problemas ambiguos o abiertos puede ayudar a los niños a sentirse cómodos con la idea de que, aunque útiles e informativas, las soluciones a problemas reales no son perfectas ni únicas. Los estudiantes pueden desarrollar una buena disposición hacia la modelación matemática, así como aptitudes en cuestiones individuales del proceso de modelación, para posteriormente combinar estos aspectos en un proceso completo e iterativo.

LA ENSEÑANZA MEJORADA Y EL APRENDIZAJE DE OTRAS HABILIDADES

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA APORTA OPORTUNIDADES PARA EL DESARROLLO DE LA COMUNICACIÓN.

A través de las actividades de modelación, todos los estudiantes pueden compartir, aprovechar y desarrollar sus habilidades de comunicación. Los problemas de modelación están frecuentemente formulados con frases y diagramas, y requieren que los estudiantes expresen sus respuestas usando visualizaciones, matemáticas abstractas y en forma escrita. Adicionalmente, los equipos de modelación matemática deben comunicarse bien para tener éxito y para que los docentes puedan alcanzar metas múltiples de enseñanza con una sola actividad. El énfasis en la comunicación puede requerir atención especial en aquellos estudiantes con desafíos del lenguaje, incluyendo aquellos que están aprendiendo el idioma que se usa en el ambiente escolar. Al mismo tiempo, dado que hay múltiples formas de expresarse y que los problemas están contextualizados en el mundo real, la modelación puede proporcionar experiencias positivas a los estudiantes que necesiten expresar sus ideas de formas alternativas.

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA ESTIMULA EL TRABAJO EN EQUIPO.

Las matemáticas son, algunas veces, vistas como una actividad solitaria, y esta visión está tal vez reforzada por nuestra forma de valorar los esfuerzos individuales en la escuela y en competencias. La modelación es inherentemente un deporte de equipo y los problemas son lo suficientemente grandes y complejos como para que el enfoque de equipo ayude a los estudiantes a encontrar soluciones útiles[8]. Las competencias laborales de distribución de funciones, comunicación, incluyendo escuchar, y la cooperación pueden entrar todas naturalmente en juego a medida que el grupo trabaja en conjunto hacia la solución.

EVALUACIÓN MEJORADA DEL APRENDIZAJE

LAS TAREAS DE MODELACIÓN PUEDEN AYUDAR A LOS DOCENTES A IDENTIFICAR LAS IDEAS EQUIVOCADAS DE LOS ESTUDIANTES EN UN CONTEXTO FAMILIAR PARA EL ESTUDIANTE, DE MODO QUE PUEDAN EXPLICAR MEJOR SU RAZONAMIENTO.

Cuando los estudiantes presentan sus modelos, los docentes y sus compañeros pueden comentar sobre ciertos elementos que adviertan y que les generen dudas. Invariablemente, las presentaciones incluirán errores y oportunidades para realizar correcciones. Los docentes, así como los compañeros de clase, pueden determinar la naturaleza de los errores al pedirles a los estudiantes que expliquen su razonamiento.

Como lector de GAIMME, puede ser que usted ya esté convencido de que la etapa de preescolar hasta segundo año de secundaria es un escenario estupendo para la modelación matemática. Sin embargo, en el caso de que aún se sienta escéptico, esperamos que las ideas anteriores lo convenzan de que no solo existen muchos beneficios al iniciar de forma temprana, sino que la situación y el momento en que se da la educación desde preescolar hasta segundo año de secundaria tiene ventajas características. En la siguiente sección, dirigimos la atención a cómo los estudiantes de preescolar hasta segundo año de secundaria pueden experimentar la modelación, construyendo el proceso completo al empezar con sus componentes.

IMPLEMENTANDO LOS COMPONENTES Y EL PROCESO DE MODELACIÓN CON LOS ESTUDIANTES

A lo largo de esta sección, dirigimos atención particular a los componentes del proceso de modelación y a cómo los estudiantes se involucran en la modelación dentro de cada franja de grados académicos como las define la NTCM: preescolar a segundo grado, tercero a quinto grado y sexto a segundo año de secundaria. La meta es que los estudiantes se involucren en el ciclo repetitivo de la modelación como modeladores matemáticos maduros. Los modeladores principiantes se pueden enfocar en un solo componente, como la realización de suposiciones o la evaluación de los pros y los contras de un modelo en particular.

Consideramos los componentes teniendo en cuenta a los estudiantes de preescolar a segundo año de educación secundaria. Para cada franja de grados académicos, describimos lo que puede pasar usando los componentes de modelación incluidos en "Getting Started & Getting Solutions" ("Primeros Pasos y Primeras Soluciones")[9]. Discutimos primero cada componente del proceso de modelación a través de la perspectiva de una pregunta abierta: "¿qué deberían traer para almorzar?" Después, dirigimos nuestra atención hacia ejemplos sobre cómo el trabajo de modelación inspirado por este problema del *Almuerzo* se puede desarrollar en cada franja de grados académicos. Entre otras cosas, el uso de esta pregunta inicial y común ilustra que un solo escenario de modelación puede llevar a muchos problemas de modelación diferentes y que pueden ser revisados una y otra vez en diferentes niveles académicos.

EMPEZAR CON UN PROBLEMA DEL MUNDO REAL

Los problemas genuinos de modelación matemática comienzan siendo grandes, poco claros e inmanejables. Los modeladores tienen que decidir el problema específico que quieren resolver, qué información necesitan para resolverlo, qué herramientas matemáticas pueden ser útiles y cómo determinarán en qué momento han obtenido una solución útil. Esto difiere ampliamente de los problemas verbales tradicionales o aplicaciones de libros de texto, donde toda la información necesaria es dada y donde hay una sola respuesta correcta conocida.

Para facilitar la modelación matemática, el docente escoge primero un escenario cercano a sus estudiantes que contenga las preguntas que les pueden importar a algunas personas, por ejemplo, el contexto dado por el problema del *Almuerzo*. Esas personas pueden ser el administrador del comedor de estudiantes, un padre o un cuidador, un negociante local o alguien más dentro de la escuela. Para involucrar a los estudiantes, el problema puede ser planteado como una historia donde una explicación, decisión o estrategia es requerida. Si la historia es lo suficientemente abierta, ésta motiva a los modeladores a hacer preguntas que les ayuden a decidir cómo abordar el modelo y la solución. A medida que los estudiantes crecen, pueden participar en la selección y desarrollo de problemas. Usualmente, al comenzar con un escenario enriquecedor, los docentes y los estudiantes refinarán las preguntas que usarán para modelar hacia una respuesta. Para el problema del *Almuerzo*, puede que decidan que están llevando almuerzo en un día típico de la escuela y no para un evento especial o un día feriado.

HACER SUPOSICIONES Y DEFINIR VARIABLES ESENCIALES

Una vez que los estudiantes hayan decidido el problema específico a abordar, quizás con la facilitación del docente, podrán reflexionar sobre qué información necesitarán para resolverlo. En términos simples, necesitan descifrar "qué importa". De inicio, los docentes pueden pedir a los estudiantes que mencionen qué es lo que les parece importante sin dar a conocer formalmente que las respuestas pueden llevar a suposiciones en la modelación. Para el problema del *Almuerzo*, incluso respuestas tan generales como "cosas que me gustan", "cosas saludables" y "suficiente para llenar mi lonchera" pueden ser buenos puntos de partida. Además, para generar suposiciones individuales generales, los estudiantes pueden considerar pares de suposiciones y discutir la compatibilidad o incompatibilidad de sus elecciones. ¿Podemos incluir tanto "cosas que me gustan" como "cosas saludables"? Los estudiantes pueden ser incentivados a pasar de comparaciones simples de suposiciones a la discusión de sus implicaciones en el contexto del problema. Nos gustan las bananas y son sanas para nosotros, pero ¿caben dentro de nuestras loncheras? Pueden también justificar por qué algunas cantidades deben ser fijas mientras que otras pueden variar. Si alguna información requerida para el modelo no es accesible, los estudiantes pueden estimar valores para cantidades y justificar esas suposiciones. ¿Qué tan grande es una banana?

Otra posibilidad es dar a los estudiantes un modelo y que ellos discutan qué suposiciones son hechas en ese modelo. Una solución al problema del *Almuerzo* puede incluir una naranja, una manzana, o una pera, todas de tamaño mediano. Los estudiantes pueden conjeturar que el modelo asume que cada almuerzo debe incluir una porción de fruta y que esta fruta debe ser fácil de llevar o que sea del gusto de la mayoría. Insistir en ver qué suposiciones parecen sustentar un modelo proporciona una forma para observar a las suposiciones funcionar en el contexto de un modelo, incluso antes que los estudiantes estén listos para generar modelos ellos mismos.

Al llevar este ejercicio más allá, el alumno puede reflexionar sobre cómo el modelo y sus soluciones pueden cambiar si se hubieran hecho suposiciones diferentes. ¿Qué pasa si asumimos que el costo total de los objetos que empacamos tiene que ser menor a USD 5 y después cambiamos esa cantidad a menos de USD 3? Posteriormente, cuando los estudiantes ejerzan una mirada crítica sobre sus propios modelos y sus soluciones, este análisis de las suposiciones será relevante.

USAR MATEMÁTICAS PARA LLEGAR A UNA SOLUCIÓN

Una característica importante de la modelación matemática es que los estudiantes no solo tomen decisiones sobre cómo delimitar el centro del problema, sino que también se empoderen para escoger un enfoque matemática. En los grados primarios, tomar e implementar decisiones sobre cómo usar las matemáticas para llegar a una solución puede ocurrir en escenarios de grupo. Algunos niños pequeños se pueden beneficiar del uso de representaciones visuales que les ayuden a reconocer un patrón o tendencia, mientras que otros pueden reconocer el patrón si es algo familiar para ellos. Por ejemplo, el número de zanahorias en un almuerzo puede ser 0, 6 o 12, lo que algunos estudiantes pueden reconocer como múltiplos de 6 y después enterarse que es el número de zanahorias en una porción estándar. Los estudiantes pueden comenzar formulando conclusiones individuales o trabajar en grupos pequeños para considerar soluciones múltiples a un problema particular, comenzando a comparar o contrastar sus soluciones.

Los estudiantes deben ser cada vez más capaces de seleccionar y aplicar herramientas matemáticas más sofisticadas y representaciones visuales para desarrollar y resolver sus modelos. También deben conectar sus elecciones de herramientas a sus suposiciones y variables. Por ejemplo, una suposición en el problema del *Almuerzo* puede ser que la comida debe ser nutritiva. Los estudiantes de tercer grado pueden considerar la nutrición inicialmente en términos del número total de calorías para un estudiante. Los estudiantes del sexto grado pueden considerar la nutrición como el porcentaje del requerimiento diario de nutrientes particulares y recurrir a su habilidad para razonar proporcionalmente. Los docentes pueden motivar a los equipos a considerar más de una estrategia y a buscar herramientas matemáticas adicionales antes de decidirse por algún enfoque y herramientas en particular.

ANALIZAR Y EVALUAR EL MODELO Y LA SOLUCIÓN

Dado que los modelos involucran suposiciones y aproximaciones, un aspecto crítico de la modelación matemática implica el evaluar la capacidad de la solución de resolver satisfactoriamente el problema. Varios cuestionamientos acerca del modelo pueden ser útiles para ayudar a los estudiantes a aprender a analizar y evaluar modelos y soluciones.

¿En qué contextos los modelos proveen información valiosa? ¿Qué tan precisas son las soluciones?

¿Qué tanto cambian las soluciones si las suposiciones, el modelo o los parámetros varían ligeramente?

¿Los resultados tienen sentido?

¿Mejoraría el modelo si se cambia algo decidido en una etapa anterior y se resuelve el problema?

Las preguntas relacionadas al problema del *Almuerzo* pueden ser tan diferentes como, "¿qué tal si cambiamos la lonchera por una bolsa?" o "queríamos llenar nuestras loncheras, ¿el modelo produce en algún momento almuerzos que sobrepasen la capacidad de las loncheras?".

REPETIR TANTO COMO SE REQUIERA PARA REFINAR Y EXTENDER EL MODELO

Los modelos nunca son perfectos debido a que son simplificaciones de la realidad. Sin embargo, la simplicidad de un modelo puede ser una cualidad positiva porque, por ejemplo, puede mostrar tendencias o relaciones causa y efecto. Al mismo tiempo, los modelos no serán válidos para cada situación o no representarán una situación real de forma exacta. Parte del proceso de modelación es la evaluación continua de limitaciones y fuentes de error en un modelo que está basado en la información disponible. Idealmente, los estudiantes en todos los niveles tendrán la oportunidad de revisar y mejorar sus modelos basándose en nuevos descubrimientos hechos durante el análisis de los componentes. Los estudiantes que trabajan con el problema del *Almuerzo* pueden encontrar que su modelo funciona bien hasta que descubren que han olvidado algún punto importante. Puede ser que no hayan incluido una bebida o quizás cambiaron una suposición, como cuántas horas pasarán desde el momento en que el almuerzo es empacado hasta que es comido. Algunas veces la repetición o iteración no puede suceder debido a restricciones de tiempo, pero inclusive una discusión sobre las posibles mejoras transmite a los estudiantes que los modelos son raramente soluciones estáticas y perfectas de un problema.

Las repeticiones del proceso de modelación pueden brindar oportunidades para incitar e introducir nuevo contenido.

Las repeticiones más extensas del proceso de modelación pueden brindar oportunidades para incitar e introducir nuevo contenido. Un primer modelo puede aplicar material aprendido anteriormente, pero, al discutir posibles mejoras del modelo, puede volverse aparente que la clase tiene ya la preparación matemática para mejorar el modelo como considere apropiado. En el problema del *Almuerzo* la decisión de considerar el contenido total de grasa, así como las calorías totales hace que los estudiantes pasen de trabajar con ecuaciones lineales a usar un sistema de desigualdades lineales e incentiva a los estudiantes a emplear métodos laboriosos o a cambiar sus planes. Estos incidentes pueden motivar a los estudiantes, así como proporcionar oportunidades valiosas para introducir, explorar y aplicar nuevas herramientas matemáticas.

IMPLEMENTAR EL MODELO Y REPORTAR LOS RESULTADOS

Los modeladores pueden repetir y mejorar el modelo indefinidamente, pero las fechas de entrega siempre llegan. Tanto en la escuela como en el trabajo, en algún punto llega el momento de declarar victoria. Las buenas noticias son que, cuando los estudiantes reportan sus resultados, pueden explicar lo que harían para mejorar su modelo y bajo qué situaciones el modelo sería o no útil. Un trabajo substancial en el problema del *Almuerzo* puede producir un modelo justificable, pero hay que notar que el resultado no toma en consideración un rango de alergias alimenticias o toma en cuenta el costo de la comida, pero no el ahorro que puede haber si la comida se compra a granel.

Los estudiantes pueden presentar sus resultados de varias formas. Los más jóvenes pueden querer mostrar y escenificar sus ideas o usar una lonchera empacada. Con ayuda, pueden mostrar los datos que han recolectado en algún tipo de gráfica o diagrama. También pueden escoger el uso de manipulativos para comunicar o describir representaciones simples de ideas matemáticas, como mostrar cómo la longitud relativa de una banana y el ancho de una lonchera están relacionados. Niños muy pequeños pueden hacer y reportar sus comparaciones. En tanto que los estudiantes desarrollan sus habilidades lingüísticas, pueden hacer presentaciones más formales, tanto en términos de sus oraciones como sus representaciones y visualizaciones matemáticas. A medida que los estudiantes empiezan a pensar de forma más abstracta, pueden generalizar y debatir sus afirmaciones usando reportes y carteles. La modelación proporciona oportunidades para que los estudiantes transfieran sus habilidades de comunicación y representación matemática a nuevos contextos, pudiendo permitir a los docentes evaluar si los estudiantes realizan esta transferencia de forma apropiada.

Como en cualquier otra situación que requiera una presentación y una discusión de ideas matemáticas, los docentes pueden apoyar tanto a estudiantes que estén aprendiendo el lenguaje que se usa para comunicarse de forma habitual en clase como a aquellos que tengan desafíos del lenguaje expresivo con formas alternativas o suplementarias para formular sus ideas. Por ejemplo, los estudiantes que tengan problemas al producir las palabras necesarias para describir sus suposiciones pueden realizar dibujos para ilustrar cada una de ellas o hacer un borrador inicial de sus ideas en su lengua materna.

COMPONENTES COMO PARTE DEL PROCESO ITERATIVO

Hasta este punto, hemos considerado cómo los componentes individuales del proceso de modelación pueden ser interpretados con estudiantes de preescolar hasta segundo año de secundaria. Los estudiantes también necesitan entender cómo estos componentes se unen dentro de una actividad completa de modelación. Como se ilustra en la Figura 2.2, los componentes no se desenvuelven usualmente de una forma simple y lineal. Por ejemplo, en esta figura, después de que los estudiantes identifican el problema y sus suposiciones, repiten el proceso de encontrar y analizar una solución dos veces antes de avanzar a refinar el modelo y reportar sus resultados.

Terminamos esta sección con ejemplos basados en el problema del *Almuerzo* para ilustrar cómo puede desarrollarse el proceso completo en cada nivel académico. En la siguiente sección seguimos adelante con una discusión práctica sobre cómo planear, introducir y facilitar lecciones de modelación matemática en grados de primaria y secundaria.

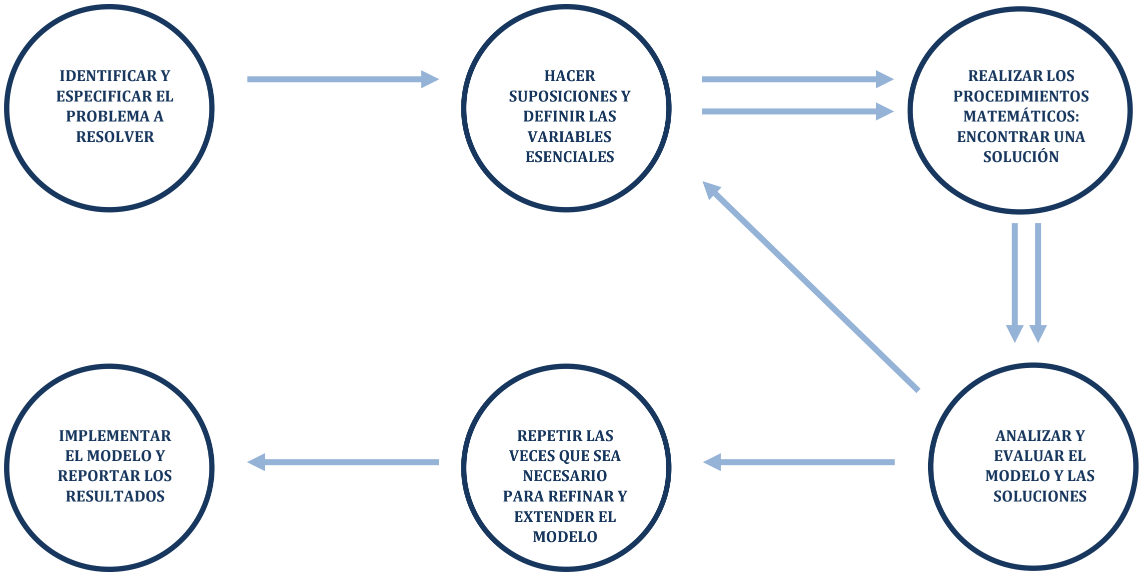


FIGURA 2.2: EJEMPLO DE UN AVANCE NO LINEAR A TRAVÉS DEL PROCESO DE MODELACIÓN CON UN SOLO RETROCESO Y REPETICIÓN

Problemas del Almuerzo: de preescolar a segundo grado. De preescolar a segundo grado, la clase posiblemente se enfocará en una pregunta central que puede estar motivada por el interés del alumno, pero que es identificada, seleccionada o articulada por el docente. Por ejemplo, al concentrarse en la discusión del problema del *Almuerzo*, el docente puede dejar que los estudiantes discutan un alimento que todos coman, como las zanahorias. Una vez que la decisión de considerar las zanahorias ha sido hecha, el problema de modelación puede ser expresado en la forma de una pregunta central. La pregunta puede ser cuantitativa, como "¿cuántas zanahorias debe haber en un almuerzo?" o una pregunta cualitativa, como "¿qué alimentos van mejor con las zanahorias?". De cualquier forma, la meta es usar las matemáticas para contestar la pregunta.

La pregunta sobre cuántas zanahorias debe haber en el almuerzo es intencionalmente abierta. Para determinar una respuesta razonable a la pregunta "¿cuántas zanahorias debe haber en un almuerzo?", los estudiantes pueden recolectar datos de sus propios almuerzos. Puede ser que cuenten el número de zanahorias en sus almuerzos cada día en una semana particular. Por ejemplo, los estudiantes más jóvenes pueden ser capaces de contar y colocar el mismo número de estampas de zanahorias en los almuerzos del grupo en un histograma. Las gráficas pueden ser hechas por todo el grupo hasta que los estudiantes estén listos para tratar de hacerlas de forma independiente. Un paso final importante es ir más allá de recolectar datos y decidir qué información o conclusiones pueden ser obtenidas de las representaciones visuales de la información. La clase puede decidir que quiere recolectar más información acerca de las zanahorias o de otro elemento diferente del almuerzo.

Al explorar una preferencia cualitativa, como qué tanto les gusta algún alimento a los estudiantes, la clase puede desarrollar una escala para representar que tanto les agrada. La escala puede ser pictórica, como las distintas caras a lo largo de la escala usada por profesionales médicos para que los niños muestren que tanto dolor experimentan, o numérica, desarrollando así el entendimiento de los estudiantes sobre líneas numéricas. Las preferencias alimentarias determinadas por estos datos e ilustraciones pueden ser usadas por el grupo para informar decisiones, como qué refrigerio será traído por los padres al siguiente evento de la clase.

Los docentes de preescolar a segundo grado de primaria pueden capitalizar la habilidad de los niños pequeños para escenificar una situación, contar, comparar tamaños y hacer correspondencias uno a uno. Otra forma de abordar el problema del *Almuerzo* puede ser enfocarse en cuántas zanahorias caben en una lonchera de un tamaño en particular. En primaria, los estudiantes pueden sintetizar sus experiencias para evaluar y comparar los resultados de sus modelos. Por ejemplo, los estudiantes pueden usar bloques de tamaños apropiados para representar diferentes alimentos, con el objetivo de investigar cómo empacar almuerzos en loncheras de diferentes tamaños. Pueden determinar y comparar cuántos elementos y cuántas combinaciones de estos caben dentro de cada lonchera. A medida que analizan sus respuestas, pueden hacer predicciones acerca de cómo sus soluciones cambiarían si la lonchera fuera dos veces más larga.

Aunque no sea esencial, sí es posible usar el vocabulario de modelación, como “hacer suposiciones”, a medida que los estudiantes trabajan en un problema. En estas experiencias de modelación tempranas, la idea primordial es enseñar a los estudiantes jóvenes cómo estructurar, explorar y contestar preguntas relevantes del mundo real usando ideas matemáticas.

Problemas del Almuerzo: de tercer a quinto grado. De tercero a quinto grado, los estudiantes pueden jugar un papel más relevante en la generación y definición de respuestas de modelación importantes que quieran abordar. Los estudiantes de preescolar a segundo grado probablemente contestarán la pregunta de cuántas zanahorias debe haber en una lonchera basados en experiencias concretas de lo que observan en sus propios almuerzos. De tercero a quinto grado, los estudiantes pueden tomar en cuenta información más sofisticada, como la información nutricional, las cantidades, las preferencias de sabor y la variedad. Por ejemplo, pueden ser capaces de generar argumentos sobre nutrición para comparar las zanahorias con otra opción de vegetales.

Los estudiantes también pueden considerar una pregunta más amplia, por ejemplo, cómo preparar el mejor almuerzo a través de una variedad de opciones alimentarias. Para hacer el problema más manejable pero aún abierto, el docente puede introducir el número o tipo de elementos de un almuerzo como una suposición base al tomar un menú reciente, ya sea semanal o mensual, del almuerzo preparado en el comedor de estudiantes y usar el contenido de éste como posibles opciones. La pregunta general se vuelve entonces, “¿cuál es el mejor almuerzo?”. Presentar soluciones involucra entonces la definición matemática de la palabra “mejor” y una justificación de dicho enfoque, incluyendo pros y contras de las diferentes definiciones. Por ejemplo, una respuesta que permite muchas combinaciones diferentes de alimentos puede no ser factible para un comedor de estudiantes, que solo puede producir cierto número de opciones de comida al día. Una respuesta que produzca el almuerzo más sano puede sugerir almuerzos que sean muy caros o que no sean considerados apetitosos para algunos estudiantes.

Los estudiantes pueden también considerar casos extremos y si estos pueden ser captados por el modelo. Por ejemplo, se les puede preguntar qué cambia si llenan una bandeja del comedor de estudiantes a si empacan su propia lonchera. Este tipo de razonamiento de la forma “qué pasa si” puede llevar a un análisis interesante del modelo y expandir el sentido de los tipos de reflexiones, como hipotéticas, condicionales y lógicas, que son parte de las matemáticas.

De tercero a quinto grado, los docentes pueden incentivar a los estudiantes a considerar el valor predictivo de sus modelos. Por ejemplo, ¿cuántas zanahorias debe pedir el comedor de estudiantes cada semana? A medida que los estudiantes aprenden a asignar valores, deben ser capaces de darse cuenta de si los números son de magnitud razonable. ¡Puede ser que un total de 100 zanahorias para toda una escuela no tenga sentido! Las estimaciones pueden empezar a entrar en juego y los estudiantes pueden tratar de cuantificar las fuentes posibles de error o de incertidumbre de un modelo. Por ejemplo, si redondeamos el costo de una comida de USD 3.89 a USD 4.00, con una diferencia de 11 centavos, el costo anual de las comidas en una escuela con 450 estudiantes sería de más de USD 8910. Cuando los estudiantes representan su respuesta usando fracciones o decimales o notación científica, los docentes pueden pedirles que justifiquen sus decisiones en cuanto al uso de cada representación.

El uso del vocabulario de modelación, como "hacer suposiciones", a medida que los estudiantes trabajan en un problema puede facilitar la conversación. En las experiencias de modelación de tercero a quinto grado, una idea primordial es incentivar a los estudiantes a que vayan más allá de las descripciones matemáticas relativamente reducidas a descripciones de situaciones concretas para considerar preguntas más amplias, combinaciones de suposiciones y variables, valores extremos y potencial predictivo para construir y poner a prueba los modelos que desarrollen.

Problemas del Almuerzo: de sexto a segundo año de secundaria De sexto a segundo año de secundaria, los estudiantes pueden ser considerados como independientes. La clase completa puede estar considerando una pregunta importante, pero cada grupo de 3 a 5 estudiantes puede revisar un aspecto particular del problema que les interese. En comparación con el trabajo en grados anteriores, los estudiantes probablemente pueden generar argumentos más sofisticados, tomando en consideración varias limitaciones simultáneas como el espacio, las preferencias y la nutrición.

Puede ser útil, como con estudiantes más jóvenes, usar un menú de almuerzo mensual para identificar y justificar los componentes estándar de un almuerzo. Los estudiantes pueden estudiar diferentes sistemas de votación para determinar qué tipo de pizza podrían ordenar para una fiesta de la clase que deje a la mayoría contentos.

Distintos grupos pueden tomar diferentes decisiones, como cuál sería la marca de la pizza, la distancia de entrega, el costo, las opciones de entrega, las opciones sin gluten, los ingredientes y el tipo de masa. La sección de suposiciones del proceso de modelación puede involucrar limitar estas opciones a un número razonable y posiblemente limitante de opciones dentro de una elección en particular, como los ingredientes a considerar.

Los estudiantes deben ser capaces de empezar a usar variables para representar cantidades que cambian, así como de usar ecuaciones para representar relaciones entre cantidades. Incluso con preguntas cualitativas como cuál es la mejor pizza, o combinación de pizzas, para la orden de la clase, los estudiantes pueden generar un sistema de calificación para las pizzas que tome en cuenta diferentes atributos y pesos. Pueden tener una función para el costo de la pizza que incorpore no solo las opciones de pizza, como tamaño e ingredientes, sino también el combustible que se usará para ir a recoger la pizza o el tiempo contra el costo de envío.

Los estudiantes del sexto a segundo año de secundaria deben ser capaces de proporcionar múltiples representaciones de sus resultados incluyendo representaciones simbólicas, gráficas y verbales (escritas y orales). A medida que los estudiantes reporten sus resultados, especialmente cuando tienen algo de experiencia en modelación, se debe esperar que sean críticos con su propio trabajo. Los docentes pueden pedir a los estudiantes que discutan los pros y los contras de las decisiones que tomaron, tanto en el componente de la formulación de suposiciones como en su elección del procedimiento matemático. Los modeladores maduros pueden demostrar y discutir lo que pasa con su solución cuando cambian una suposición o un número particular; un proceso conocido como análisis de sensibilidad, ya que demuestra qué tan sensible es el resultado del modelo a cambios de varios parámetros. Por ejemplo, si uno de los parámetros es el número de trozos de manzana, se puede preguntar qué cambiaría si el número aumenta o disminuye, por ejemplo, si hace la comida más o menos apetitosa de acuerdo con el voto de la clase, o cómo afecta las calorías en particular o la nutrición en general.

El vocabulario de la modelación, como "hacer suposiciones", puede facilitar la conversación. Una idea importante para sexto a segundo año de secundaria es motivar a los estudiantes a actuar de forma más independiente mientras enfrentan problemas mayores con una colección de herramientas matemáticas en desarrollo. El problema del *Almuerzo* y sus posibilidades tiene una excelente conexión con uno de los problemas del Reto Moody's Mega Math (https://m3challenge.siam.org/archives/2014/problem). El problema llamado *Lunch Crunch: Can Nutritious Be Affordable and Delicious?* (Haciendo Cuentas en el Almuerzo: ¿La Comida Nutritiva Puede Ser Accesible y Deliciosa?), pregunta cómo hacer el almuerzo simultáneamente delicioso, nutritivo y accesible. Después de trabajar en su propia aproximación del problema del *Almuerzo*, a los estudiantes de grados medios podría gustarles ver que un problema similar fue planteado en una competencia nacional de modelación para estudiantes de grados superiores. También pueden ver ejemplos de soluciones ganadoras en el sitio web de Moody.

FACILITANDO LECCIONES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Los estudiantes de preescolar a segundo año de secundaria están, de muchas formas, listos para involucrarse en aspectos de la modelación matemática. Dado que la modelación es usualmente manejada como una actividad grupal, los grupos de estudiantes pueden estar trabajando de forma semindependiente, y aún más a medida que maduran. Una clave para facilitar la modelación matemática con los estudiantes es sincronizar el papel del docente con el proceso de modelación matemático de los estudiantes. En la modelación matemática, como en cualquier otra lección de clase, el papel del docente antes y durante la actividad es importante.

¿CÓMO HACEN MODELACIÓN MATEMÁTICA LOS ESTUDIANTES DE PREESCOLAR A SEGUNDO AÑO DE SECUNDARIA?

Como puede imaginarse, los estudiantes en varias etapas de desarrollo se involucrarán en los procesos de modelación matemática de forma diferente. Existe evidencia científica[10] que indica que los estudiantes en grados primarios pueden involucrarse, al menos en cierta medida, en los mismos componentes del proceso de modelación que estudiantes en grados más avanzados. En nuestra experiencia, los niños pequeños presentan, a veces de forma desenfrenada, muchas opciones y necesitan ayuda para concentrarse, mientras que es más probable que estudiantes mayores den una respuesta estándar y necesiten ayuda para expandir su razonamiento.

Los docentes deberán facilitar el proceso de modelación de forma cuidadosa y apropiada en relación a la etapa de desarrollo, a la vez que mantienen el problema abierto y la capacidad de los estudiantes para tomar decisiones genuinas. A pesar de las diferencias de desarrollo, los estudiantes en todos los niveles académicos pueden tomar decisiones significativas que dan forma a sus experiencias de modelación.

A continuación, describimos las acciones del docente como facilitador en el proceso de modelación. Mientras lee esta sección, puede ser útil que usted tenga en mente algunos ejemplos de problemas de modelación; el Apéndice B describe cómo los estudiantes dentro de cada franja de grados del NCTM pueden llevar a cabo un proceso de modelación para abordar la misma pregunta ampliamente abierta: ¿qué deberían traer para almorzar? Nos referimos a este problema como el problema del *Almuerzo*. El Apéndice B explora este problema con un grupo de estudiantes de primer grado, ilustrando cómo los niños de la franja de preescolar a segundo grado podrían involucrarse en la modelación con este problema. También seguimos a un grupo de estudiantes de cuarto grado a medida que abordan este problema, y observamos un grupo de estudiantes de séptimo grado trabajándolo. La experiencia exitosa de cada grupo mientras se involucra en la experiencia de modelación adquiere forma a través de sus propias decisiones, mientras que el docente lo facilita. La siguiente sección provee un marco de trabajo para los docentes de modelación.

¿QUÉ PAPEL JUEGAN LOS DOCENTES PARA APOYAR LA MODELACIÓN EN LOS ESTUDIANTES?

Carlson, Wickstrom, Burroughs and Fulton[11] (2016) han desarrollado un marco de trabajo para la enseñanza de la modelación en grados primarios (ver Figura 2.3). El arreglo interno cíclico de los tres cuadrados con esquinas redondeadas representa a los estudiantes involucrándose en las tres fases del ciclo de modelación: Planteamiento de Preguntas, Construcción de Soluciones y Validación de Conclusiones. Este es un diagrama del proceso de modelación más simple que el que se describe en el Capítulo 1. Las acciones principales de docencia están representadas por las frases en negrita: Desarrollando y Anticipando, Implementando y Revisando. El ciclo representado por el arreglo cíclico triangular externo identifica tres acciones del docente: Organizar, Monitorear y Reagrupar, para facilitar la modelación mientras que los estudiantes están concentrados en la Representación.

Puede que usted observe fuertes similitudes con las cinco prácticas para la orquestación del discurso matemático descritas por Stein y Smith[12], pero también verá algunas diferencias derivadas del concepto del problema abierto de la modelación. Por ejemplo, el orden en el cual los grupos de estudiantes presentan las soluciones de modelación es importante. Un docente puede escoger presentar una solución moderadamente exitosa al principio, de modo que las fortalezas y debilidades puedan ser identificadas. Esto puede normalizar la idea de que incluso un modelo “terminado” tampoco es perfecto. Otra posibilidad es ordenar presentaciones por el tipo de especificidad de las suposiciones hechas por los grupos. Esta elección puede ser hecha de acuerdo con lo que el maestro quiera enfatizar.

Dado que la modelación matemática es un proceso iterativo en el cual los modeladores vuelven a revisar las etapas iniciales para mejorar sus soluciones, el orden de las soluciones es algo en lo cual los estudiantes toman la iniciativa cuando reportan su trabajo.

LA ANTICIPACIÓN Y EL DESARROLLO: EL PAPEL DEL DOCENTE ANTES DE QUE EMPIECE LA MODELACIÓN

Como parte de la planeación, los docentes anticipan al escoger o desarrollar un problema de modelación e imaginan qué puede pasar en el salón de clases. La atención añadida a la facilitación es indicativa de la habitual naturaleza más extensa, poco clara y abierta del trabajo de modelación y la importancia de indagar en los matices del contexto de la modelación.

¿TENGO QUE ELABORAR MIS PROPIOS PROBLEMAS?

Incluso los modeladores experimentados pueden encontrar desafiante la tarea de crear problemas de modelación exitosos. Seleccionar y refinar problemas existentes puede liberar al docente para así enfocarse en su implementación. A medida que se adquiere experiencia, los docentes pueden sentirse más cómodos al desarrollar problemas de modelación y

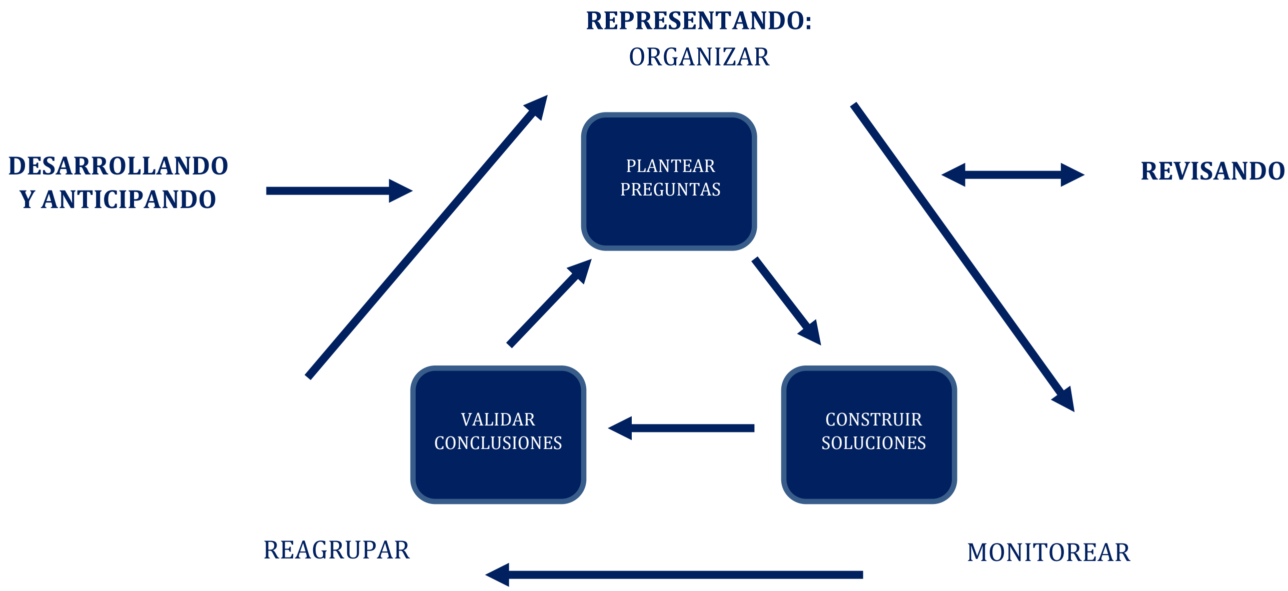


FIGURA 2.3: MARCO DE TRABAJO DEL PAPEL DEL DOCENTE EN LA FACILITACIÓN DE LA MODELACIÓN, INCLUIDO CON EL PERMISO DE CARLSON ET AL. (2016).

capitalizar los eventos en el salón de clases, en el comedor de estudiantes o en el patio de recreo y convertirlos en problemas de modelación que resuenen con los estudiantes. Ya sea que usted esté desarrollando un nuevo problema o adaptando un problema de modelación que alguien más haya creado, las siguientes preguntas pueden ayudar a guiar sus decisiones.

¿ES ÉSTE REALMENTE UN PROBLEMA DE MODELACIÓN Y CÓMO PUEDO INTRODUCIR EL PROBLEMA DE FORMA QUE SEA ABIERTO Y SU SOLUCIÓN NO OBVIA?

Como señalamos en el Capítulo 1, la simple adición de etiquetas o contextos no hace de un problema un buen problema de modelación. Un problema de modelación tiene también que implicar la toma de decisiones del alumno que le da forma a la definición del problema, el proceso de modelación y una variedad de soluciones.

¿QUÉ CONTENIDO MATEMÁTICO QUIERO ABORDAR EN UN PROBLEMA DE MODELACIÓN Y ESTE PROBLEMA ABORDA ESE CONTENIDO?

Aunque la actividad de modelación promueva la curiosidad y el descubrimiento de un nuevo tema, proporcione la oportunidad de practicar habilidades adquiridas recientemente o encuentre conexiones y revise contenido presentado anteriormente, si quiere que el proceso de modelación conduzca hacia un contenido matemático específico, usted procurará desarrollar el problema o la facilitación con estos objetivos de aprendizaje en mente. Como se muestra en el Capítulo 1, los problemas de modelación pueden ser desarrollados agregando flexibilidad y espacio para la creatividad en problemas ya existentes en el libro de texto. El Apéndice B ofrece dos ejemplos adicionales de problemas de modelación, ambos diseñados para captar el problema de modelación específico de la división, aunque los dos problemas tienen diferentes niveles y apertura. El problema de *Autobuses y Cocientes* abre una puerta para la modelación al pedir a los estudiantes que consideren qué tan razonables son los resultados numéricos de los cálculos. *La Hora del Té Trapezoidal* involucra fundamentalmente a los estudiantes en la escritura de expresiones algebraicas, lo que es útil en el desarrollo de un modelo.

QUIERO DESARROLLAR UNA PREGUNTA DE MODELACIÓN SOBRE ALGO EMOCIONANTE QUE MIS ESTUDIANTES NOTARON. ¿CÓMO PUEDO CONVERTIR ESTA SITUACIÓN EN UNA EXPERIENCIA AUTÉNTICA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA?

Los niños observan siempre el mundo que los rodea y hacen conjeturas. En algunas instancias, usted puede transformar estos momentos en problemas de modelación matemática. Por ejemplo, cuando un niño mira dos libros y comenta que le tomará más tiempo leer uno de ellos, hay una oportunidad para seguir con la pregunta de cuánto tiempo tomará leer un libro como una tarea de modelación. Los estudiantes jóvenes pueden empezar con dos libros específicos y proponer que tardarán más en leer un libro porque es más pesado o de mayor altura que el otro. Sus reacciones son todas partes de su habilidad del desarrollo de conservar y comparar cantidades. Los estudiantes mayores pueden abrir la última página de dos libros y comparar el número total de páginas en ambos para tomar una decisión. En esta instancia, es razonable preguntar al alumno si sabe de cualquier otra característica adicional, además del número de páginas que pueda considerar para calcular la cantidad de tiempo que tomaría leer un libro. Medir el tiempo que toma leer los libros puede ayudar a probar y refinar su razonamiento sobre qué atributos considerar, cómo cuantificarlos y cómo refinar sus ideas. Posteriormente, se puede pedir a los estudiantes de forma directa que pronostiquen cuánto tiempo les tomará leer un libro. Este tipo de pregunta puede motivar a los estudiantes a comenzar a pensar sobre las respuestas como un rango de valores en lugar de un solo número.

UNA VEZ QUE TENGO UN PROBLEMA, ¿QUÉ MÁS TENGO QUE ANTICIPAR?

La facilitación de la modelación depende frecuentemente de elegir el momento oportuno, decidiendo cuánto tiempo hay que permitir que los estudiantes se esfuercen para que aprendan a perseverar ante la adversidad y cuándo reagrupar la clase para proporcionar nueva información o guía. Con una tarea de modelación de varios días, la situación puede, frecuentemente, ser caótica el primer día. Después, con el tiempo, los grupos usualmente llegan a un plan y lo ponen en marcha. Las siguientes preguntas pueden ayudar a anticipar la dirección que los estudiantes podrían tomar:

- ¿Qué tipo de preguntas necesitarán hacer los estudiantes a medida que tratan de definir una respuesta al problema?
- ¿Qué información será la que buscan y dónde la obtendrán?
- ¿Cuáles discusiones deben tener lugar en grupos pequeños y cuáles con todo el grupo?
- ¿Qué decisiones necesitarán tomar los estudiantes y qué información necesitarán para tomarlas?
- ¿Qué enfoque matemático pueden usar?
- ¿Habrá información que deba ser introducida posteriormente si los estudiantes necesitan ser encaminados hacia una dirección en particular?
- ¿Cómo puedo impulsar a los estudiantes sin quitarles la oportunidad de desarrollar conceptos y descubrir relaciones entre ellos?
- ¿Cuántos días deben trabajar los estudiantes en este problema? ¿Por cuánto tiempo cada día?

IMPLEMENTANDO: EL PAPEL DEL DOCENTE DURANTE LA MODELACIÓN - ORGANIZAR, MONITOREAR Y REAGRUPAR.

El siguiente paso es implementar, en el cual los docentes organizan a los estudiantes e introducen el problema de modelación, monitorean a los estudiantes mientras trabajan y periódicamente los reagrupan. La idea de este marco de trabajo es separar el trabajo del alumno y el docente. En lugar de exponer la modelación a los estudiantes, el docente es más como un entrenador. Al *organizar,* el docente *introduce* el problema y les da a los estudiantes las reglas básicas del juego, como un problema general a ser resuelto, algunas estrategias matemáticas y algunas ideas acerca de cómo trabajar en equipo. Mientras que los estudiantes se involucran en la modelación, el docente los *monitorea*. ¿Qué enfoques están usando? ¿Qué oportunidades matemáticas están surgiendo? ¿Dónde se están quedando atascados? Después de forma periódica, el docente puede tomar una pausa para *reagrupar* a los estudiantes y abordar confusiones, responder preguntas que aclaren la situación o dar pequeñas sugerencias.

La naturaleza iterativa de la modelación requiere que los estudiantes seleccionen cuáles de sus ideas presentar como el modelo actual, tal vez después de que realicen la secuencia de sus soluciones y antes de que refinen sus modelos. En resumen, los estudiantes como modeladores son responsables de los enfoques a seguir y de conectar sus modelos al contexto más amplio de la tarea original. Los estudiantes se vuelven responsables de seleccionar, secuenciar, y conectar, especialmente cuando están involucrados en el trabajo iterativo de construir, evaluar y mejorar un modelo y producir un reporte. En suma, para un docente, apoyar el proceso de modelación significa muchas veces que el papel del docente no es exhibir procedimientos, sino motivar a los estudiantes a escoger, desarrollar y aplicar abordajes matemáticos.

El papel del docente no es exhibir procedimientos, sino motivar a los estudiantes a escoger, desarrollar y aplicar abordajes matemáticos.

Una vez que los estudiantes desarrollen un número de soluciones, los docentes pueden aprovechar la oportunidad para ayudar a los estudiantes a pensar cómo podrían abordar el problema si emplearan una segunda repetición de la modelación para mejorar sus respuestas. Describir las fortalezas y debilidades del modelo puede ser un requerimiento estándar del problema. No toda sugerencia para mejorar puede ser igualmente útil. Por ejemplo, los estudiantes podrán notar que pueden mejorar la precisión del modelo y discutir en qué punto la precisión numérica pierde significado en el contexto del mundo real.

Mientras los estudiantes trabajan en grupos, los docentes pueden monitorear su progreso caminando alrededor del salón, escuchando sus conversaciones y ocasionalmente deteniéndose para pedirles que expliquen su reflexión actual. El objetivo del proceso de monitoreo es asegurar que los estudiantes estén dirigiéndose a un camino apropiado, no necesariamente a un solo camino “correcto”. Cuando los estudiantes toman un camino inesperado y posiblemente poco fructífero, se necesita disciplina para evitar de forma inmediata la redirección de su trabajo al reagrupar muy pronto. Puede ser valioso que los estudiantes descubran cuando redirigirse ellos mismos hacia una nueva perspectiva.

En la reagrupación, el docente puede hacer que los equipos reporten sus progresos, seguido de una discusión con toda la clase. También puede proporcionar información adicional o hacer una pregunta indagatoria para enfocar los esfuerzos de los equipos. Usted debe decidir cuándo y qué debe de compartir cada grupo con el resto de la clase, dependiendo de cuánto desee que los estudiantes influencien sus respectivos enfoques. Tener menos comunicación puede llevar a una variedad más interesante de soluciones, mientras que una mayor comunicación quizá dirija al grupo a que aplique una herramienta o procedimiento en particular. De la misma forma, compartir información en las primeras etapas del proceso puede llevar a los grupos a tener más experiencias similares que si trabajan en aislamiento hasta etapas posteriores. Por lo tanto, los objetivos de la actividad determinarán el nivel de intervención.

REVISANDO: EL PAPEL DEL DOCENTE DESPUÉS DE UNA RONDA DE MODELACIÓN

Parte de la enseñanza de la modelación es hacer que los estudiantes revisen y refinen sus soluciones. Puede también ser útil revisar el problema en la clase, lo que significa volver y reconsiderar el problema desde una perspectiva diferente o con herramientas adicionales (Carlson, Wickstrom, Burroughs, y Fulton). Los problemas de modelación pueden ser trabajados durante varios días, lo que da la posibilidad de considerar si se quiere que la clase revise el problema desde otro ángulo. Usando el problema del *Almuerzo* como ejemplo, tal vez la presentación inicial del problema es "¿cuántas zanahorias debe contener una lonchera?" y después, en un día posterior, usted y sus estudiantes pueden revisar el problema preguntándose "¿cuánta agua u otra bebida debe contener una lonchera?" o "escoge otro vegetal diferente a las zanahorias y usa la información nutricional u otra información en particular para determinar qué vegetal es mejor opción nutricional". Una pregunta más sofisticada puede pedir a los estudiantes que describan los pros y los contras de cada opción. En cada caso, los estudiantes justifican sus respuestas usando las matemáticas.

¿LOS ESTUDIANTES APLICARÁN DE INMEDIATO LAS MATEMÁTICAS PARA ABORDAR UN PROBLEMA DE MODELACIÓN?

Una pregunta importante es si usted quiere que los estudiantes usen un procedimiento matemático en particular para abordar un problema de modelación. Los problemas más auténticos dejan esta opción abierta para el alumno, pero algunas veces puede ser apropiado recordarles a los estudiantes algunas de las herramientas que pueden escoger para aplicar. Los estudiantes pueden hacer una lluvia de ideas durante la clase para que surjan diversas formas de enfrentar el problema o pueden tratar de pensar en más de un enfoque antes de que empiecen a resolver formalmente el problema en grupos. Podría ser valioso que la clase haga un poco de esta lluvia de ideas de forma temprana sin necesariamente trabajar hacia una solución, de forma que los estudiantes puedan ver que hay múltiples formas de usar las matemáticas desde el comienzo.

Algunas veces, mientras desarrollamos problemas, es posible que no anticipemos si los estudiantes se involucrarán de alguna manera que les permita evitar el uso de las matemáticas. El Apéndice B ofrece un ejemplo de cómo algo concebido originalmente como un buen problema de modelación matemática falló en hacer que los estudiantes usaran matemáticas porque pasaron más tiempo en el aspecto de diseño del problema que en el modelo matemático. El escenario claramente involucró a los estudiantes, pero la implementación permitió que estos parecieran ser exitosos ante la solución del problema sin que las matemáticas tuvieran peso sobre la pregunta. Este fracaso aparente puede proporcionar una oportunidad para que el docente revise el problema y direccione a los estudiantes hacia un tratamiento matemática del problema.

Es importante reconocer que la modelación no es solo una actividad para concluir un capítulo. Los problemas pueden ser introducidos cuando las herramientas matemáticas precisas que se necesitan no están claras o son desconocidas. Un modelo inicial puede usar contenido que los estudiantes ya conocen y servir para señalar su insuficiencia para el problema presente. Reexaminar provee una oportunidad única para motivar e introducir nuevo material matemático.

EVALUACIÓN

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, la modelación matemática puede ser usada en los grados más elementales para:

- Promover contenido matemático a través de la motivación de materia nueva, la implementación y práctica de habilidades previamente aprendidas, o la síntesis e integración de temas matemáticos.
- Introducir pensamiento cuantitativo en otras áreas además de las matemáticas, al hacer que los estudiantes usen la modelación matemática para abordar preguntas que naturalmente surgen en el almuerzo, en el patio de recreo, durante el tiempo de lectura, en la clase de ciencias o donde sea.
- Desarrollar aspectos positivos del trabajo matemático de los estudiantes, como la creatividad, persistencia, trabajo en equipo, razonamiento cuantitativo y comunicación, a medida que se involucran en la modelación y a través de componentes separados o en todo el proceso.

Dependiendo de los objetivos que usted tenga con un ejercicio de modelación en particular, probablemente querrá evaluar diferentes resultados. A continuación, abordamos algunas ideas de cómo evaluar el aprendizaje del contenido matemático, otras habilidades y la modelación en sí misma. Para conocimiento adicional, por favor revise el Apéndice D.

EVALUANDO CONTENIDO MATEMÁTICO

Si su objetivo es que los estudiantes practiquen contenido matemático específico, entonces, al usar un problema de modelación, puede aún evaluar si los procesos matemáticos son correctos de una forma familiar. Más aún, puede pedir a los estudiantes que expliquen sus respuestas en el contexto de la pregunta de modelación, lo que proporciona una mirada más íntima de qué tan bien los estudiantes han internalizado los conceptos subyacentes.

EVALUANDO HABILIDADES SOCIALES E INTERPERSONALES

Dado que los problemas de modelación son frecuentemente trabajados en equipos, la pregunta de la evaluación tiene muchas facetas. Es posible pedir a los estudiantes que describan tanto sus propias contribuciones como la de cada uno de sus compañeros de equipo. Es posible que requiera que los estudiantes mayores escriban reflexiones no solo acerca del producto de su modelación, sino sobre el proceso. Muchas de estas habilidades que se necesitan para resolver en equipo problemas de modelación amplios y que no tienen mucha claridad en su abordaje son altamente valoradas en el lugar de trabajo y pueden ser incluidas en el proceso de calificación o la rúbrica.

EVALUANDO MODELACIÓN MATEMÁTICA

Las actividades acordes con la modelación matemática no están necesariamente alineadas con la docencia y las experiencias de aprendizaje más tradicional. Cuando usted empiece a enseñar modelación matemática puede ser difícil saber si sus estudiantes están realmente involucrados en el proceso de modelación, y más aún saber cómo evaluar qué tan bien están modelando. La Figura 2.4 ofrece una lista de preguntas que usted puede hacerse a sí mismo a lo largo de la experiencia de modelación para evaluar si los estudiantes están participando en el proceso de modelación matemática.

La evaluación debe enfocarse en el proceso holístico de la modelación matemática. Mientras que evalúa los modelos desarrollados por los estudiantes, no debe revisar solo la respuesta final para ver si es similar a una respuesta esperada. Las evaluaciones deben enfocarse principalmente, en cuáles piezas del proceso de modelación están presentes y cómo estas piezas están lógicamente conectadas. La calidad del trabajo incluye reflexión y comunicación del resultado, cómo el modelo puede ser mejorado, cuándo es útil, y de qué forma está limitada. La identificación de confusiones y errores matemáticos debe ser una parte del proceso de revisión y evaluación, pero es solo uno de muchos factores importantes. Evaluar la modelación puede ser mucho más desafiante que corregir un examen con el objetivo específico de una respuesta en particular por problema. Enfrentarse a este reto puede proporcionar a los estudiantes retroalimentación significativa sobre muchas áreas de su desarrollo académico.

En algunos casos, un alumno desarrolla una idea o procedimiento que parece poco común al docente. Muchos docentes de modelación, incluyendo los escritores de esta guía, han estado en situaciones donde no están seguros en ese momento de si un desarrollo en particular es viable y correcto. En este caso, es recomendable pedir a los estudiantes que expliquen su razonamiento y posteriormente tomar algo de tiempo para consultar recursos con información acerca del contexto. Considerar si las ideas de un alumno son viables es una tarea que los facilitadores de modelación en todos los niveles tienen que realizar frecuentemente. Los momentos de incertidumbre del docente permiten a los estudiantes darse cuenta de que el aprendizaje es realmente un esfuerzo de toda la vida y que los adultos no son entes infalibles. Los estudiantes pueden observar cómo el docente continúa acogiendo nuevas preguntas y cómo continúa demostrando curiosidad y persistencia al buscar activamente nuevas respuestas. Este aprendizaje conjunto de nueva información, convenciones y enfoques puede ser una de las partes más divertidas y gratificantes de la enseñanza de la modelación matemática.

Al igual que en otras áreas de las matemáticas, la evaluación formativa puede proporcionar un panorama enriquecedor del progreso de los estudiantes. Por ende, calificar la modelación no es solo acerca de calificar los componentes completados o verificar la exactitud matemática, sino también entender el razonamiento matemático de los estudiantes y responder qué tan bien este razonamiento justifica el nivel de eficacia del modelo en la resolución de problemas del mundo real.

Hay también muchas oportunidades de evaluar a los estudiantes en cada componente del proceso de modelación. El Apéndice D presenta algunas preguntas diseñadas para evaluar el proceso, a la vez que confiere una estructura para dar retroalimentación significativa. El vocabulario es lo suficientemente básico para que también los estudiantes se animen a usarlo para autoevaluarse

.

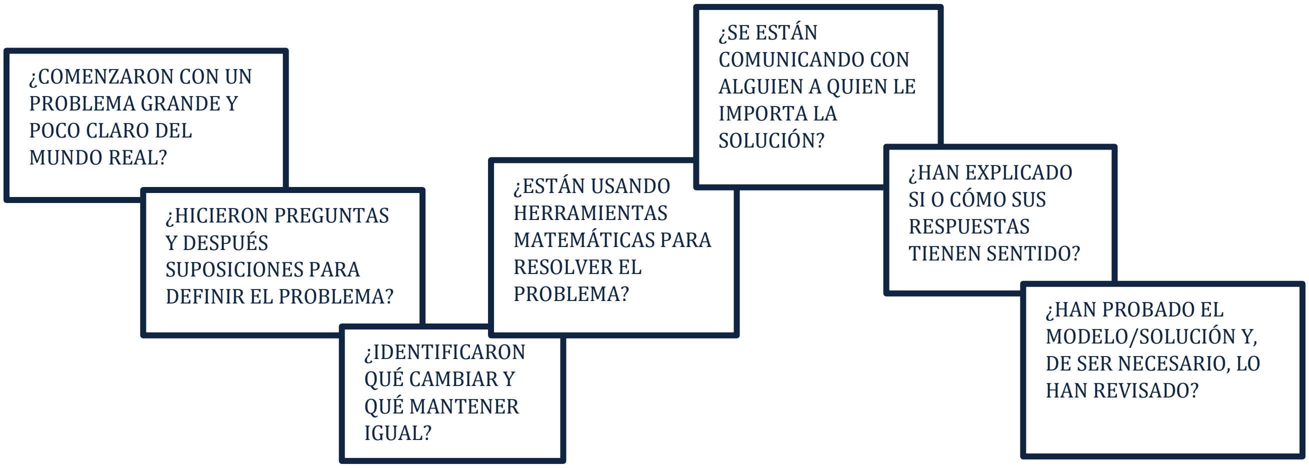


FIGURA 2.4: PREGUNTAS PARA EVALUAR SI LOS ESTUDIANTES ESTÁN MODELANDO, USADO CON PERMISO DE LEVY, IMMERSION[13]

CONCLUSIÓN

La modelación matemática desde preescolar hasta segundo año de secundaria permite a los niños usar las matemáticas para rastrear la resolución de preguntas que se hacen naturalmente acerca del mundo. Esta sección, además de los ejemplos en los Apéndices, proporciona disposición temprana y habilidades para la modelación matemática que pueden ser expandidas y ser de influencia en años posteriores.

3. MODELACIÓN MATEMÁTICA EN MEDIA SUPERIOR

INTRODUCCIÓN

A medida que los estudiantes avanzan a niveles académicos superiores, el proceso de modelación y los principios guía para la enseñanza de la modelación matemática descritos anteriormente para primaria y secundaria continúan intactos, aunque el contenido matemático del currículo de niveles superiores ofrece a los estudiantes nuevas herramientas apropiadas para la modelación matemática, como el álgebra, la geometría, el precálculo y la estadística.

Simultáneamente, las experiencias de vida y los intereses de los estudiantes de niveles superiores se expanden rápidamente, abriendo la puerta para un arreglo amplio de problemas para investigar situados en el mundo real.

La modelación matemática en el marco de los niveles superiores puede tomar muchas formas. Los modelos pueden ser usados como motivación para aprender nuevas técnicas y nuevo contenido. Las actividades de modelación pequeñas pueden ser usadas para reforzar nuevos conceptos y para ilustrar sus aplicaciones, mientras que las más extensas ayudan a los estudiantes a integrar ideas provenientes de secciones diferentes del curso y también de cursos diferentes. Aunque las restricciones de tiempo aún afectan qué tan a menudo y por cuánto tiempo los estudiantes pueden participar en los aspectos creativos del proceso de modelación matemática, los estudiantes de media superior tienen una mayor oportunidad de seguir el ciclo de modelación completo, incluyendo la repetición o iteración, para refinar y extender el modelo. El perfeccionamiento con base en el trabajo anterior es una práctica que define el modo de hacer de la modelación matemática, pero puede ser muy nueva para los estudiantes.

Para la mayoría de los estudiantes que no se han involucrado en los tipos de aventuras de modelación descritas en este reporte, el énfasis en respuestas correctas únicas, la enseñanza de un cuerpo fijo de habilidades específicas y la dependencia en algoritmos matemáticos les ha dado una opinión errónea de las matemáticas. Un currículo de matemáticas para media superior con una estructura que incluya cursos separados de Álgebra I, Geometría, Álgebra II y Precálculo contribuye a una idea seccionada de las matemáticas. Dentro de esta estructura, la modelación matemática amplía la visión matemática de los estudiantes y demuestra de forma vívida la conexión que existe entre los temas estudiados, esto debido a que los modelos involucran frecuentemente una combinación de geometría, álgebra y componentes gráficos y estadísticos.

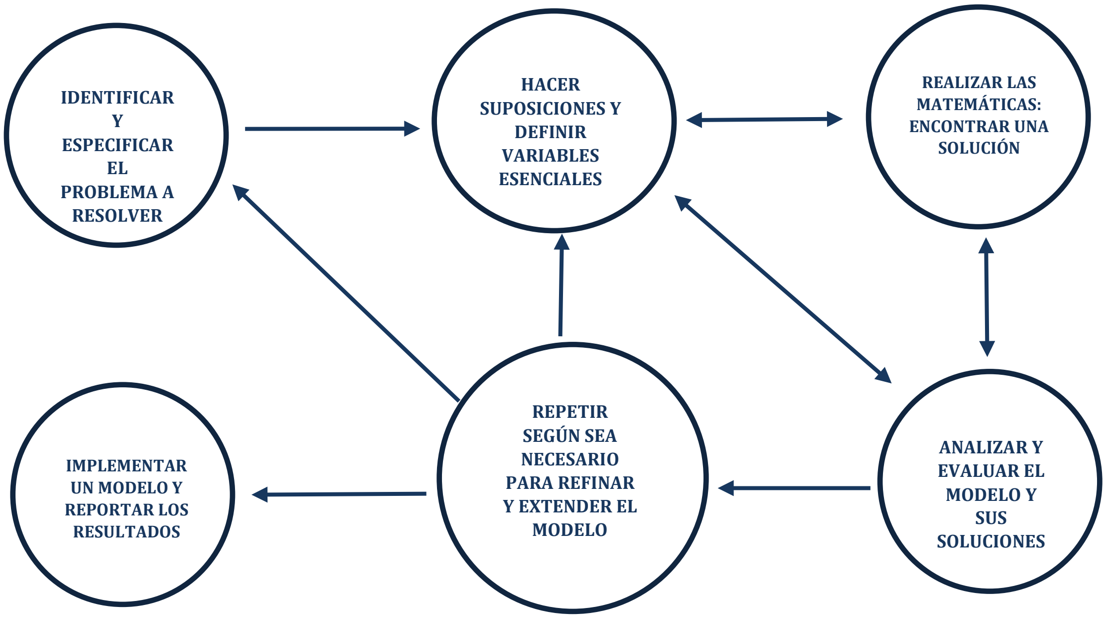


FIGURA 3.1: EJEMPLO DE UN AVANCE NO LINEAR A TRAVÉS DEL PROCESO DE MODELACIÓN CON UN SOLO RETROCESO Y REPETICIÓN

A medida que los estudiantes empiezan a pensar en sus planes futuros y mientras sus intereses individuales en otros campos crecen, la naturaleza inherentemente interdisciplinaria de la modelación puede ayudarlos a ver la extensa y diversa aplicación de las matemáticas. Con la modelación, los estudiantes observan cómo las matemáticas pueden ayudarles a hacer predicciones y proporcionar entendimiento sobre el mundo real. Más aún, la realidad puede serles útil al usar matemáticas. Ellos pueden identificar errores matemáticos si sus modelos no producen resultados que sean consistentes con el mundo real. Este ir y venir ayuda a elevar el estatus de las matemáticas. Tal vez, por primera vez, los estudiantes sean capaces de ver cómo éstas se relacionan con el mundo real y pueden brindar entendimiento sobre varios aspectos de sus vidas. El poder de la modelación ayuda a explicar por qué, a través de la historia humana, otros campos y disciplinas han hecho uso de ideas y métodos matemáticos. El lugar importante que las matemáticas tienen en el currículo preuniversitario es una consecuencia del poder que éstas tienen para explicar y brindar compresión a todas las áreas de la vida. Sin importar la trayectoria que la vida del estudiante tome después de sus estudios superiores, la capacidad de pensar de forma flexible y formular suposiciones realistas sobre lo que puede pasar cuando el futuro es incierto y el entendimiento de cómo las conclusiones pueden ser alcanzadas con base en conocimientos previos son herramientas muy valiosas para la vida

A medida que avanzan por el currículo de media superior, los estudiantes se familiarizarán con muchos de los modelos matemáticos de tipo estándar: ecuaciones lineales para modelar el cambio constante, funciones exponenciales para modelar procesos de crecimiento y declive, funciones trigonométricas para modelar comportamiento periódico, modelos estadísticos para datos y probabilidad simple para modelar patrones de azar. Al usar estas herramientas, especialmente cuando se modifican para encuadrar en un contexto dado, se fortalece el entendimiento de los estudiantes sobre las ideas matemáticas subyacentes en estos modelos y se facilita su uso en contextos que van más allá de aquellos para los cuales comenzaron a aprender. En media superior, los problemas que los estudiantes investiguen pueden ser más complejos. Incluso, quizás involucrar más variables y ofrecer una selección más amplia de posibles aproximaciones, tanto analíticas como basadas en tecnología, que aquellas exploradas en años anteriores. A este nivel, los estudiantes pueden estar más familiarizados con programas y aplicaciones en línea, y emplear hábilmente tanto herramientas para graficar como hojas de cálculo, e incluso puede que lleguen a crear programas cortos para la aproximación a resultados dentro de la etapa de la modelación *Realizar las Matemáticas: Encontrar la Solución,* cuando un método de solución algebraica sea desconocido.

La forma en que las actividades de modelación son organizadas en media superior depende de las experiencias previas de modelación de los estudiantes. Si la modelación, como está descrita en la sección dedicada a primaria y secundaria de este reporte, es una práctica estándar en primaria y secundaria, entonces la enseñanza en el aula para media superior puede ser más abierta y construir sobre el entendimiento y habilidades desarrollados anteriormente. Si la modelación matemática es nueva para los estudiantes de media superior, mucho del trabajo inicial descrito para secundaria encajará naturalmente en el currículo central de los estudiantes. A lo largo de primaria, los escenarios de modelación bien diseñados pueden ser usados tanto por modeladores principiantes como expertos. Los estudiantes principiantes necesitarán más apoyo y motivación, los cuales se encuentran con frecuencia en la forma de apoyo gradual dentro del planteamiento del problema. Sin embargo, mucha gradación puede reducir la forma en que ellos se involucran en los problemas de modelación y convertirlos en una experiencia de "pintar con números", mientras que muy poco apoyo puede resultar en frustración excesiva. Los modos de apoyo gradual para el trabajo de los estudiantes están plasmados en los ejemplos del Apéndice C.

PRINCIPIOS GUÍA: MEDIA SUPERIOR

El capítulo 2 presentó cinco principios guía para la modelación matemática de preescolar a segundo grado de secundaria. Estos principios son los siguientes:

- La modelación es abierta y poco clara.
- Cuando los estudiantes estén modelando, deben tomar decisiones genuinas.
- Los problemas de modelación pueden ser desarrollados a partir de tareas y ocupaciones familiares.
- La evaluación debe enfocarse en el proceso y no solamente en el producto o las piezas.
- La modelación ocurre en equipos.

Cada uno de estos principios es igualmente importante, tanto en el marco de media superior como en el de preescolar, primaria y secundaria pero no se exponen de la misma forma en las aulas de educación media superior.

LA MODELACIÓN ES ABIERTA Y POCO CLARA

La modelación requiere de una mente abierta tanto de los estudiantes como de los docentes, así como de voluntad de explorar, equivocarse y reagruparse, revisar y mejorar y finalmente, reflexionar sobre lo que su trabajo indica o no acerca del fenómeno que se investiga. Este proceso es difícil para todos los estudiantes y puede ser particularmente desafiante para aquellos con un historial de éxito en la clase de matemáticas tradicional. Refiriéndonos a la descripción dada por Zawojewski, Lesh, y English de la reacción inicial de estudiantes a actividades que dan lugar a la modelación en el área de ingeniería, se menciona lo siguiente:

> "La frustración es a menudo la primera reacción por parte de los estudiantes. Para muchos, sus experiencias pasadas en la clase de matemáticas los han llevado a creer que cuando se les da un problema, deben ser supuestamente capaces de buscar, identificar y aplicar inmediatamente el procedimiento

> correcto. Por ende, cuando son incapaces de identificar un procedimiento particular al instante, sienten que el problema es muy exigente o que el docente preparó muy poco a los estudiantes para el trabajo en cuestión"[1].

Aprender a apoyar el trabajo de los estudiantes sin dirigirlos demasiado es un nuevo reto para muchos docentes y uno que toma tiempo y experiencia para dominar. En esencia, los docentes deben comprender la noción de brindar motivación y apoyo sin proporcionar una respuesta, lo que es esencial para el crecimiento de los estudiantes dentro de la modelación. Es importante que los docentes sepan que el respetar las ideas de los estudiantes y sus enfoques, así como la habilidad de proporcionar tanto validación apropiada como correcciones mientras se ofrece apoyo moral y se evita dirigirlos demasiado son patrones que pueden ser aprendidos y convertirse en algo muy común al interactuar con los estudiantes y sus ideas, pero que efectivamente en un inicio, esto requiere fuerza de voluntad. Lograr estar cómodo con el nivel y tipos de apoyo necesarios puede ser difícil. Zawojewski, Lesh y English explican:

> "Los estudiantes piden con frecuencia ayuda a los docentes, especialmente durante las primeras actividades que dan lugar a la modelación. Es difícil para los docentes negarse a responder, sin embargo, la meta es dejar la resolución del problema a los estudiantes. Incluso, muchos estudiantes y docentes encuentran difícil tolerar las aproximaciones ineficaces y las direcciones equivocadas que surgen comúnmente durante las etapas tempranas de la modelación. El docente puede encontrar que, al principio, es mejor mantenerse físicamente lejos de los grupos, ya que los estudiantes tratarán de conseguir que éste les indique cómo resolver el problema"[2].

A lo largo de este proceso poco claro, los estudiantes generarán estrategias que serán nuevas para el docente, lo que puede ser tanto energizante como intimidante para los que son nuevos en esta experiencia. El dicho común en educación, "se aprende un tema más profundamente al enseñarlo", es sumamente claro en el ejercicio de la modelación matemática. Enseñar a los estudiantes a modelar usando matemáticas es, en sí mismo, una tremenda oportunidad de desarrollo profesional para cualquier docente involucrado en esta tarea. Como docentes de modelación matemática en la educación media superior, es increíble cuánta claridad y lucidez se obtiene, tanto por medio de los errores de los estudiantes como de sus éxitos, cuando su pensamiento matemático los lleva a estrategias nuevas y creativas e iluminadoras. La modelación revela frecuentemente el razonamiento del estudiante, incluyendo sus ideas equivocadas, de formas que mejoran la enseñanza. Las experiencias que tienen los docentes al trabajar con problemas de modelación extensivos con sus estudiantes incrementan la madurez y competencia matemática de todos los involucrados.

Como ejemplo de desconcierto inesperado, considere el problema de *Tiros Libres*[3] que se describe a continuación. Parece ser un problema estándar para una tarea de Álgebra II[1], pero no es así cuando el mundo real es seriamente tomado en cuenta. El problema es presentado tal cual ocurrió, pero los nombres pueden ser actualizados a jugadores más actuales o locales, si así se desea.

1 Es común que en Estados Unidos la secuencia tradicional de estos temas dentro del programa en la media superior sea Álgebra I, Geometría, Álgebra II y Precálculo.

Michael Jordan es un jugador de baloncesto de Carolina del Norte. El otro día, estaba viéndolo jugar en la televisión. Mientras se movía hacia la canasta, se le infringió una falta. El presentador dijo que Michael Jordan estaba anotando el 78% de sus tiros libres. Falló el primer tiro y anotó el segundo. Más tarde en el juego, se le infringió otra falta. Esta vez, el presentador dijo que Michael Jordan estaba anotando el 76% de sus tiros libres. Determina el número de tiros libres que Jordan intentó y cuántos llevaba anotados hasta este momento de la temporada.

PROBLEMA 3.1: TIROS LIBRES

Este problema no tenía la intención de ser una sesión de modelación para la clase, sino solo un ejercicio diario. Trabajando en grupos, los estudiantes tomaron unos minutos para escribir las ecuaciones apropiadas para las tasas de éxito. Usando x para representar el número de intentos y la incógnita y para el número de tiros exitosos, la tasa inicial de éxito fue expresada como:

$$\frac{y}{x} = 0.78$$

Y para representar la tasa después de anotar un tiro libre y fallado otro, escribieron:

$$\frac{y+1}{x+2} = 0.76$$

Los estudiantes resolvieron la ecuación diligentemente y encontraron que $x = 26$ y que $y = 20.28$. Por ende, antes de esa primera falta, Michael Jordan había anotado 20.28 tiros de 26 intentos. Puede que le sorprenda la cantidad de estudiantes que estuvieron satisfechos con esta solución. Dado que sus ecuaciones estaban bien planteadas y siguieron el procedimiento enseñado de forma correcta, los estudiantes esperaron que su solución fuera también correcta. Los estudiantes más reflexivos reconocieron que tanto x como y debían ser enteros y por ende redondearon la solución a 20 de 26 tiros.

Pero, ¡no tan rápido! Tomando en cuenta cuatro decimales, el número racional 20/26 es 0.7692 y este número es redondeado a 0.77 o 77%, no 78%. ¿Acaso el estadístico o el presentador cometieron un error? Es momento de discutir en clase las suposiciones subyacentes de nuestros cálculos.

Si Michael Jordan habría anotado 20 de 26 tiros, no hubiésemos esperado que el presentador dijera: "Michael Jordan está anotando 76.92% de sus tiros libres." Él redondearía el número y diría: "Michael Jordan está anotando 77% de sus tiros libres". La poca claridad del problema se basa en que nuestros números iniciales, 78% y 76%, son ambos valores redondeados. Así que, en lugar de empezar con las ecuaciones

$$\frac{y}{x} = 0.78$$

$$\frac{y+1}{x+2} = 0.76$$

Tendríamos que haber empezado con las desigualdades:

$$0.775 \leq \frac{y}{x} < 0.785$$

$$0.755 \leq \frac{y+1}{x+2} < 0.765$$

A través de la discusión llevada a cabo con toda la clase, llegamos al verdadero modelo matemático. Dado que los porcentajes expresados fueron redondeados, en lugar de un sistema de dos ecuaciones, tenemos un sistema de cuatro desigualdades lineales. Resolver este nuevo modelo implica una región limitada por cuatro líneas, un tema incluido en muchos cursos de Álgebra II.

El problema cambió de una forma que no fue anticipada cuando el docente lo creó. Los cálculos matemáticos a realizar han tenido que ser modificados porque en la modelación se requiere que tomemos seriamente al mundo real. Este es un atributo fundamental de los modelos matemáticos.

CUANDO LOS ESTUDIANTES MODELAN, DEBEN TOMAR DECISIONES GENUINAS

A nivel del desarrollo, los estudiantes de media superior se encuentran activamente buscando independencia y la validación de su individualidad y de sus ideas. A diferencia de las matemáticas tradicionales, donde hay un solo camino a una única respuesta correcta, la experiencia de la modelación, incluyendo el trayecto, la solución y la interpretación de esta última, toma forma a partir de elecciones genuinas hechas por los estudiantes. Por lo tanto, incorporar la modelación matemática en su docencia le da el poder de invitar a sus estudiantes a ser participantes activos dentro de la creación de sus propias matemáticas.

La extensión en la que las posibles decisiones de los estudiantes de media superior varían depende del nivel de modelación que se emplee en la lección. Como en niveles anteriores, algunas veces los estudiantes serán involucrados solamente en una parte del ciclo de modelación o se usará el contexto de la modelación únicamente para reafirmar un procedimiento en particular que pueda ser usado más creativamente en experiencias posteriores.

Como ejemplo de un problema que usa solamente una porción del ciclo de modelación y que a la vez permite a los estudiantes escoger entre una variedad de elecciones y decisiones, considere el problema de *¿Cuál computadora?*[4].

La junta escolar ha decidido que cada clase de matemáticas podrá comprar una computadora para demostraciones dentro del salón de clase. Tu profesor les pide ayuda para determinar cuál de las computadoras se va a comprar. El grupo encuentra una columna de Consejos del Consumidor que califica las diferentes computadoras que el profesor puede escoger. La guía del consumidor otorga calificaciones de 0 a 10 a las computadoras en los rubros de Rendimiento y Facilidad de Uso. Una calificación de (0, 0) indica un terrible rendimiento y mucha dificultad de uso, mientras que una calificación de (10, 10) indica una computadora perfecta.

¿Cuál crees que es la mejor computadora? Explica cómo usaste matemáticas para comparar las computadoras.

COMPUTADORA	RENDIMIENTO	FACILIDAD DE USO
A	6.4	8.5
B	7.3	7.5
C	9.3	3.8
D	8.8	6.0
E	7.3	6.0
F	5.5	9.7

PROBLEMA 3.2: ¿CUÁL COMPUTADORA?

Hay varias formas para determinar criterios y establecer cuál es la mejor computadora. Para todas ellas, un primer paso puede ser graficar los datos. Observar una larga lista de números rara vez dice lo que se necesita y, a menudo, hace de las comparaciones una tarea difícil. Es más fácil observar los datos si están graficados en un plano cartesiano. Entre más extremos a la derecha estén los puntos, mejor es el rendimiento de la computadora que representan, mientras que entre más arriba esté un punto en el plano, la computadora será más fácil de usar. Por lo tanto, queremos computadoras cuyos puntos estén a la extrema derecha y muy arriba. Si una computadora estuviera en el punto más alto hacia la derecha y arriba respectivamente, ciertamente escogeríamos esa. Sin embargo, las computadoras de alto rendimiento parecen ser las más difíciles de usar.

Al observar la gráfica, es claro que la Computadora C tiene el mejor rendimiento, según la calificación de Consejos del Consumidor. Es también la más difícil de usar. Por otro lado, la Computadora F es la más fácil de usar, pero tiene el rendimiento más mediocre. Las Computadoras A, B, D y E tienen todas buen rendimiento y son razonablemente fáciles de usar.

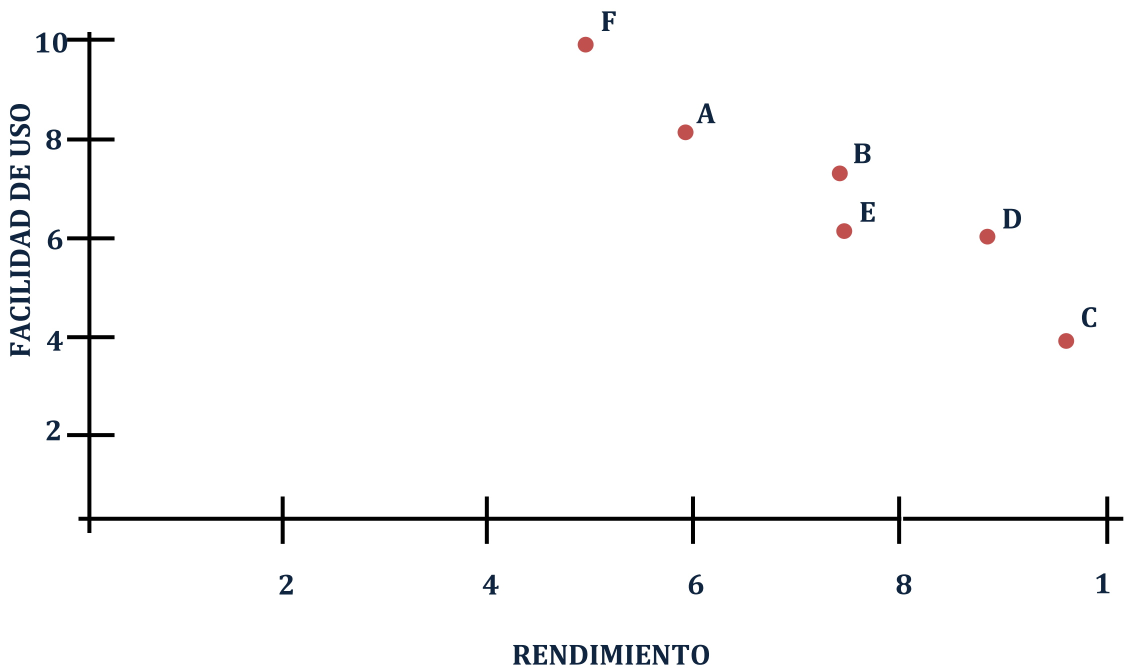


FIGURA 3.2: GRÁFICA DE FACILIDAD DE USO VS RENDIMIENTO

Las estrategias comunes de los estudiantes implican encontrar la medida total más grande. Para algunos, esto significa encontrar la suma más grande de las variables, mientras que para otros significa encontrar el producto más grande. En cualquier caso, los estudiantes pueden calcular los puntajes resultantes de las computadoras de forma directa y obtener una clasificación final para los criterios.

Usar la suma de medidas como la métrica es lo equivalente a observar gráficas de la forma $P + E = K$, que son líneas en el plano P – E. Esta interpretación nos indica que la mejor computadora es aquella posicionada en la línea con la intersección vertical más alta entre todas las líneas y con pendiente -1. La estrategia que contempla el producto más grande también lleva a diferentes interpretaciones geométricas, pero igual de útiles. Además, los estudiantes pueden inventar otros criterios para definir cuál es la mejor, como la distancia de (0,0) o proximidad a (10, 10). Los estudiantes podrán también explorar las conexiones entre las interpretaciones simbólicas y gráficas de estas estrategias. Independientemente de aquellas que los estudiantes escojan, cada método permitirá darle una recomendación al director. Sus elecciones pueden ser validadas y sus estrategias comparadas gráficamente, y en el proceso, los estudiantes combinan la expresión algebraica de la métrica comparativa con su representación geométrica.

LOS PROBLEMAS DE MODELACIÓN PUEDEN SER DESARROLLADOS A PARTIR DE TAREAS FAMILIARES

La modelación ofrece un método para que los estudiantes se acerquen a utilizar, a través del uso de contextos familiares, una variedad de herramientas matemáticas, tanto aquellas requeridas por el CCSSM, así como las herramientas emergentes no mencionadas en estos estándares, muchas de las cuales son útiles dentro de las nuevas tecnologías y las aplicaciones emergentes. Estas herramientas incluyen redes, ecuaciones en diferenciales lineales, aplicaciones de hojas de cálculo, argumentos probabilísticos y análisis estadísticos, entre otros.

Como se enfatiza en niveles anteriores, no es necesario realizar todo el proceso de modelación para practicarlo. Algunos fragmentos de modelación pueden ser filtrados en las lecciones diarias, cuando se les da a los estudiantes de 10 a 15 minutos para trabajar juntos, brindándoles la oportunidad de extender las lecciones y tomar algunas decisiones acerca de qué hacer y cómo interpretar su trabajo.

En el problema *¿Cuál computadora?,* los estudiantes han decidido cómo conjuntar dos medidas diferentes y justificar sus elecciones. El tipo de información dada en este problema, en el que ciertos elementos son calificados en diversos rubros, es muy común y los estudiantes reconocerán la situación cuando comparen automóviles, televisores y otros bienes consumibles, incluyendo instituciones de educación media superior y universidades.

En estos escenarios, los estudiantes pueden escoger entre una variedad de maneras para combinar las dos medidas dadas para cada computadora. Sin embargo, estas opciones son limitadas. El centro de una lección basada en problemas de este tipo puede ser las conexiones entre expresiones algebraicas y la geometría en el plano representando dichas expresiones. En estos escenarios, el componente de la modelación es un medio para conseguir un objetivo, pero la experiencia y muchos escenarios como éste ayudan a preparar a los estudiantes a ver a la modelación como un fin en sí mismo.

Al usar pequeñas decisiones de modelación provenientes de experiencias familiares como ésta, muchas de las características importantes de la modelación matemática pueden encajar adecuadamente en las lecciones diarias. Dichas tareas de modelación ayudan a los estudiantes a encontrar sentido a las matemáticas que están aprendiendo e ilustrar vívidamente la importancia de éstas en el entendimiento del mundo que experimentan diariamente.

LA EVALUACIÓN DEBE ENFOCARSE EN EL PROCESO Y NO SOLAMENTE EN EL PRODUCTO

En la descripción de la modelación matemática hecha por estudiantes de ingeniería durante actividades que introducen al uso de este proceso, conocidas comúnmente como MEA (*Actividades Generadoras de Modelos*) en programas de ingeniería, Lesh y Doerr observan que:

> "… estas descripciones, explicaciones y construcciones no son simples procesos que los estudiantes usan en el camino a la producción de respuestas, y no son simples epílogos que los estudiantes proporcionan después de que las respuestas han sido producidas. Estos SON los componentes más importantes y necesarios de las respuestas. Así que, ¡el proceso es el producto!"[5].

Aunque Lesh y Doerr estaban describiendo aplicaciones de modelación matemática en la ingeniería, sus observaciones se transfieren fácilmente a todas las experiencias de modelación. De hecho, el proceso es el producto.

Este entendimiento de la naturaleza esencial del proceso de modelación es muy importante para docentes, estudiantes, padres y administradores. Todos estos grupos están familiarizados con el valor de los productos del trabajo matemático, donde pruebas cronometradas periódicas son hechas para evaluar las competencias de los estudiantes en los procedimientos que están siendo usadas. Por ejemplo, en dichas evaluaciones, los estudiantes esperan alcanzar, en algunas semanas, un nivel de competencia más allá del 70%, lo que sea que eso signifique. Se espera que los estudiantes sean al menos competentes al 70% después de las primeras tres semanas de material, e igualmente competentes en las siguientes tres, y así a lo largo de todo el año.

Pero los estudiantes no serán competentes en una tarea compleja, multidimensional e iterativa como la modelación matemática en sus etapas más tempranas. Ellos experimentarán dificultad, y pueden sentir que están fallando o que fallarán. Los padres también pueden sentir que sus hijos fracasan y creer que los docentes no están haciendo su trabajo, dado que los estudiantes están siendo evaluados y calificados a través de material que los docentes no han, de manera consciente, enseñando a los estudiantes.

Las metas y el proceso de la modelación matemática necesitan ser explicados cuidadosa y claramente a todos los involucrados y el proceso de evaluación y el papel que ésta juega en valorar el rendimiento de los estudiantes, típicamente expresado con una calificación, debe de ser aclarado para todos.

Las preocupaciones de los estudiantes y los padres sobre las calificaciones pueden ser disminuidas significativamente si las experiencias de modelación son cuidadosamente escalonadas a lo largo del año, no solo a través de cada tarea individual, sino con una colección de tareas a lo largo del año. Los problemas iniciales comienzan con más apoyo y les brindan oportunidades para construir fortalezas tempranamente. A medida que los estudiantes progresan, estos apoyos son reducidos para permitir que los estudiantes continúen perfeccionando estas habilidades mientras que desarrollan otras nuevas. Si la evaluación incluye tanto retroalimentación sobre todo el proceso como calificaciones para las habilidades objetivo y si su escala es determinada de forma adecuada al inicio del año, entonces las metas de estimular el desarrollo de habilidades de modelación y el crecimiento dentro de todo este proceso producirán mucho menos rechazo por parte de estudiantes y padres que son fuertemente motivados por las calificaciones.

Como se describe en otras secciones de este documento, la modelación matemática puede ser usada para motivar la introducción de contenido nuevo, aplicar procedimientos aprendidos anteriormente y conjuntar diferentes conceptos matemáticos. En estas lecciones, la modelación es un medio para algún otro fin y es utilizada para mejorar el entendimiento y la facilidad para usar las herramientas matemáticas enseñadas en un curso específico en los estudiantes. Es difícil evaluar la práctica de la modelación matemática usando una prueba cronometrada provista durante el periodo de clase, pero el manejo del contenido aprendido a través de la modelación puede ser evaluado usando herramientas estándar.

... uno de los usos más importantes de la modelación en el salón de clases es la experiencia de crear todo un modelo por sí mismo.

Cuando el enfoque y las actividades de modelación son usadas al servicio del aprendizaje de otro contenido, se enriquece la experiencia de clase y se involucran los intereses de los estudiantes, siendo ésta una buena forma de iniciar el proceso de modelación, ya que uno de los usos más importantes de la modelación en el salón de clases es la experiencia de crear todo un modelo por sí mismo. Surge una reacción de exaltación positiva además de un nivel de posesión que pueden ser transformativos para los estudiantes. Como comentó un docente de educación media superior: “la modelación matemática no solo cambia su relación con las matemáticas, sino su percepción de sí mismos y su relación con la materia”.

Valorar la comodidad y las capacidades de los estudiantes en el proceso de modelación es un reto más grande que evaluar el conocimiento matemático aprendido a través de los ejemplos de modelación. El proceso de modelación, las interacciones entre miembros del equipo, el movimiento de un paso en el proceso a otro y de regreso, todo debe ser observado en tiempo real a medida que los estudiantes trabajan juntos con un problema desafiante.

Evaluar *Caminando Alrededor del Salón* es una habilidad importante que el docente debe desarrollar y que es aprendida con tiempo y experiencia. Escuchar las conversaciones de los estudiantes, preguntarles por el estado de su reporte y obtener una historia de su trabajo, con sus defectos e imperfecciones, le permite al docente observar el progreso de los estudiantes al hacer modelación y también le da la oportunidad de apoyar a los estudiantes cuando están atascados, cimentando confianza. Para más información sobre la evaluación de la modelación vea el Apéndice D.

Los buenos problemas de evaluación requieren matemáticas que estén dentro del alcance de los estudiantes. El asunto por evaluar no es si los estudiantes pueden resolver el problema planteado, sino la forma como resuelven el problema. Recuerde, el proceso es el producto.

Los siguientes ejemplos ayudan a ilustrar algunas posibilidades.

Este ejemplo está basado en el problema *Manejar para conseguir Combustible* discutido en el Capítulo 1 como ejemplo de un problema accesible a los estudiantes en su experiencia temprana de modelación. En esta sección, al pensar en este problema como una evaluación potencial, asumimos que los estudiantes no han trabajado aún con este ejemplo.

Todo conductor reconoce las fluctuaciones en el precio del combustible que ocurren semanalmente. Las aplicaciones móviles pueden mapear los precios de las estaciones de combustible y su ubicación y, en algunas áreas, una estación de radio local tiene un reporte especial sobre la ubicación de la estación con el menor precio por litro de combustible regular. Por supuesto, es probable que ésta se encuentre atravesando la ciudad, en otro punto de donde tú te encuentras manejando.

Si conoces las ubicaciones y los precios de varias estaciones de combustible, ¿en cuál estación deberías comprar combustible? ¿Importa si piensas que estás comprando litros de combustible o kilómetros de viaje? Desarrolla un modelo que pueda ser usado por conductores de diferentes automóviles, que les diga qué tan lejos deberían estar dispuestos a manejar con base en las especificaciones de su carro.

Entrega cuatro diapositivas de PowerPoint, una con las suposiciones, otra con el modelo matemático y dos que muestren la pantalla de una aplicación basada en tu modelo. La primera pantalla de la aplicación debe pedir

PROBLEMA 3.3: MANEJAR PARA CONSEGUIR COMBUSTIBLE

Presentar y compartir su trabajo en forma oral y escrita es un aspecto importante del proceso de modelación y la retroalimentación que los estudiantes reciben del docente y sus compañeros es importante en su desarrollo como modeladores. Pero escribir un reporte completo o documento para cada proyecto puede consumir mucho tiempo a los estudiantes y limitar sus oportunidades de involucrarse en la modelación. La tarea anterior, *Manejar para conseguir Combustible,* muestra un proceso reducido de informe para el proyecto que es divertido para los estudiantes y disminuye el tiempo de preparación requerido, así como el tiempo que el docente ocupa revisando su trabajo, y a la vez permite que los estudiantes desarrollen un modelo completo.

Otra alternativa, usando el mismo contexto, muestra como los docentes pueden estructurar la evaluación de forma temprana en la experiencia de modelación de los estudiantes al ofrecer uno o más ejemplos específicos para que éstos los analicen. El proceso de crear ejemplos específicos es un componente importante de la modelación matemática y proporcionar dichos ejemplos ayuda a los estudiantes a ver su importancia y utilidad. A continuación, se muestra un ejemplo.

La estación A se encuentra en la ruta normal de tu casa a la escuela y está vendiendo combustible esta semana a USD 1 por litro, mientras que la estación B, que está a 10 km de tu ruta normal, está vendiendo combustible a USD 0.95 por galón. La estación C vende el combustible más barato, pero está a 15 km fuera de tu ruta. Tu automóvil rinde 12 kilómetros por litro (km/l) y el de tu amigo que vive cruzando la calle rinde 4 km/l. ¿Deberías manejar a la estación B o la estación C por combustible? Explica tu respuesta.

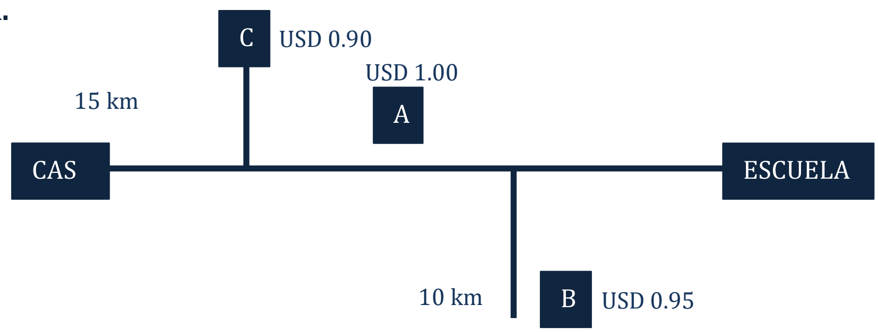


FIGURA 3.3: EJEMPLO ESPECÍFICO PARA ANÁLISIS DEL PROBLEMA MANEJANDO POR COMBUSTIBLE

A partir de este ejemplo específico, los estudiantes pueden empezar a reflexionar sobre las variables importantes en el problema. Claramente, la distancia y el kilometraje por litro de combustible juegan un papel, pero también, escondido en el problema, está la cantidad de combustible a ser comprada que está relacionada con el tamaño del tanque de combustible. Aunque la evaluación del proceso de modelación puede hacerse centrándose en ciertos aspectos de dicho proceso en formas que encajan dentro del periodo estándar de clase, en algún punto del año es importante que los estudiantes se involucren en el proceso completo a lo largo de varios días para experimentar cómo se colocan todas las piezas juntas.

Diversas alternativas para solucionar el problema general de *Manejando para conseguir Combustible* son presentadas en las secciones de ejemplos del Apéndice C de este documento.

LA MODELACIÓN OCURRE FRECUENTEMENTE EN EQUIPOS

En el documento del US Department of Labor (*Departamento del Trabajo de EU*), Soft Skills Pay the Bills (*Las Habilidades Sociales Pagan las Cuentas*), la habilidad de trabajar en equipo ocupa el tercer lugar dentro de las habilidades necesarias en el mercado laboral de hoy y mañana.

> "La habilidad de trabajar como parte de un equipo es una de las más importantes en el mercado laboral de hoy. Los empleadores están buscando trabajadores que puedan contribuir con sus propias ideas, pero también quieren que puedan trabajar con otros para crear y desarrollar proyectos y planes" [7].

Los problemas de modelación motivan a los estudiantes a contemplar procedimientos estándar de nuevas formas y a observar cómo las matemáticas pueden traer conocimiento y entendimiento a situaciones de la vida diaria. Al trabajar en un proyecto, también aprenden mucho sobre el tema de interés, como ecología, justicia social o ingeniería. Al trabajar en grupo o en equipo con problemas de modelación, los estudiantes brindan diferentes perspectivas, experiencias y habilidades al proceso. Los estudiantes fusionan todo esto a la par que toman decisiones acerca de qué atributos son más importantes para el modelo y de cómo representar estos atributos, por ejemplo, a través de gráficas, funciones, simulaciones, entre otros. Además, aprenden a presentar su trabajo a alguien que no ha sido parte de la discusión. Los estudiantes reúnen procedimientos de geometría, estadística y álgebra y los combinan de diferentes formas, lo que hace que estos conceptos y procedimientos matemáticos estén más ricamente conectados y sean más entendibles y, con su uso, sean más fácilmente accesibles bajo nuevos contextos.

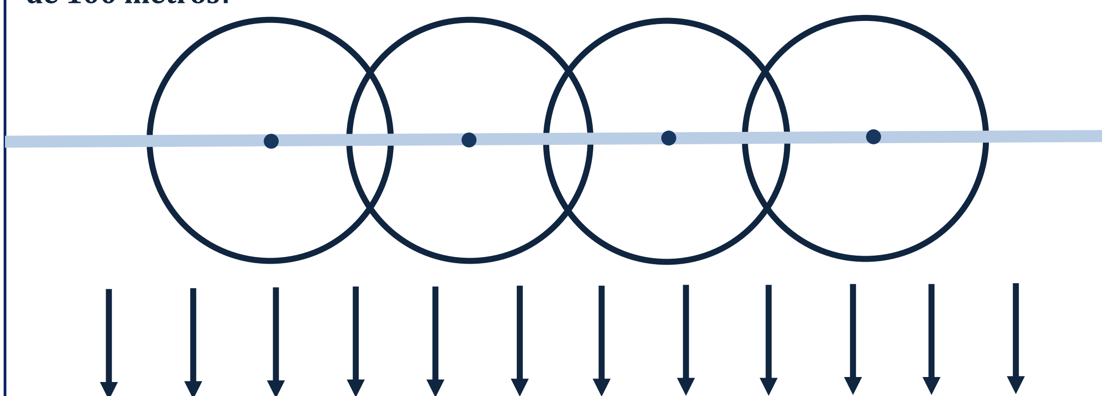
Los problemas de modelación ponen una prioridad alta en la comunicación entre miembros de un equipo, así como entre el equipo y aquellos fuera del grupo. Las actividades de modelación apoyan los estándares académicos para el desarrollo del lenguaje de formas significativas y colocan carga adicional a los estudiantes que están aprendiendo el idioma que se usa habitualmente en clase y que deben ser atendidos en el aula. Dada la naturaleza contextualizadora de la modelación matemática, estos estudiantes pueden tener dificultades al entender el problema y comunicar sus resultados. Sin embargo, a través del proceso de modelación, estos estudiantes también tienen la oportunidad de desarrollar aún más sus habilidades de lenguaje, siempre y cuando usted o los miembros de su grupo les proporcionen el apoyo necesario.

El aspecto abierto de la modelación matemática, la variedad de alternativas para abordar el problema, la necesidad de presentar e interpretar claramente las ideas detrás del modelo y la necesidad de aplicar la modelación a una variedad de situaciones del mundo real, se combinan para crear oportunidades para que cada estudiante, de manera individual, contribuya de muchas formas al trabajo del grupo. Es importante apoyar a los estudiantes a medida que trabajan juntos, para facilitar su cooperación y permitirles aprender de ellos mismos.

La selección de compañeros de equipo es una responsabilidad importante para el docente. Los buenos grupos de modelación son diversos. Son a menudo las colaboraciones de diferentes habilidades, experiencias de vida y puntos de vista las que llevan a los enfoques más interesantes de los problemas. Darles a los estudiantes oportunidades para trabajar en grupos diferentes y jugar diferentes papeles dentro de estos grupos es importante para desarrollar sus habilidades de modelación. Por lo tanto, todos los problemas típicos producto de la dinámica de un grupo de estudiantes deben ser considerados al crear y apoyar grupos de estudiantes. Como se señala en *Usando Grupos de Trabajo en la Instrucción Matemática*, "como cualquier plan de organización, el valor del trabajo en grupos recae no en el uso del método, sino en la calidad de la implementación"[8]. Los grupos de modelación no son diferentes, aunque usualmente la tarea presentada a los estudiantes es más interesante y motivadora que el trabajo habitual de clase.

El trabajo en equipo es también importante en muchas tareas al permitir que éste sea dividido, haciendo posible completarlas dentro del tiempo asignado de clase. El problema de *Irrigación* proporciona un ejemplo de cómo un grupo trabajando en conjunto puede desarrollar un modelo que podría ser más largo y tedioso para completar por un solo estudiante.

Un sistema de irrigación lineal consiste en una tubería de agua posicionada sobre ruedas que la mantienen por encima del nivel de las plantas. Varias boquillas son colocadas a lo largo de la tubería y cada boquilla rocía agua en una región circular. Todo el sistema se mueve lentamente a lo largo del terreno a velocidad constante, regando las plantas que se encuentran por debajo mientras se mueve. Tienes 100 metros de tubería y 6 boquillas disponibles. Las boquillas liberan un rocío relativamente uniforme dentro de una región circular de 15 metros de radio. ¿Qué tan lejos deben colocarse las boquillas para producir la distribución más uniforme de agua en un campo rectangular de 100 metros?



PROBLEMA 3.4: EL PROBLEMA DE IRRIGACIÓN

En este problema, los estudiantes deben darse cuenta de que la cantidad de agua rociada en un punto en particular en el terreno por una sola boquilla es proporcional a la longitud de la cuerda geométrica del círculo de la boquilla que pasa por ese punto. Las áreas del terreno regadas por dos cabezales de aspersión reciben una cantidad de agua proporcional a la suma de las longitudes de las cuerdas. Los estudiantes pueden acercarse al problema cuando reconozcan las cuerdas encontradas a cada metro a lo largo de la tubería. Deben llegar a reconocer, o que se les asista a reconocer, que solo necesitan considerar la porción del terreno entre dos boquillas adyacentes.

Los estudiantes al usar hechos algebraicos o geométricos encontrarán que la longitud de una cuerda de x metros desde el centro de una boquilla es de 2y = 2 $\sqrt{15^2 - x^2}$. Si las boquillas están separadas por D metros, entonces el punto que está a x metros de una boquilla es también a $D - x$ metros de la boquilla colindante, permitiendo el cálculo de la longitud de la cuerda correspondiente en un círculo de regado.

El trabajo en equipo permite al grupo de cuatro estudiantes calcular las longitudes de todas las cuerdas a intervalos de un metro entre las dos boquillas rápidamente. Los estudiantes deben darse cuenta de que no hay distancia entre boquillas que dé una distribución completamente uniforme de agua a través del terreno. Por lo tanto, necesitan definir una medida de uniformidad en la distribución, tal vez a partir de la inspección de las boquillas colocadas lo más cerca y lo más lejos posible, representando casos extremos.

SOY NUEVO EN LA MODELACIÓN. ¿POR DÓNDE EMPIEZO?

Como ha sido ilustrado en la sección anterior, el proceso de modelación es largo, poco claro y muchas veces demandante para los estudiantes, siendo a la vez tanto energizante como agotador. Esto puede ser igual o incluso más para los docentes. Entonces, ¿cómo se puede realizar la transición de problemas de libro de texto estándar al ciclo completo de modelación sin sentirse totalmente agobiado?

Existen varios principios guía en este sentido:

- Empiece con poco.
- Escalone sus experiencias iniciales con preguntas que conduzcan a la discusión en clase.
- Use experiencias comunes, de todos los días, para motivar el uso de las matemáticas.
- Use escenarios de modelación pequeños que requieran solo uno o dos componentes del ciclo de modelación completo.
- Comparta sus metas y prácticas instruccionales con padres y administradores.

EMPIECE CON POCO

Introduzca gentilmente los problemas y actividades de modelación. Empiece con problemas de aplicación e investigaciones pequeñas y bien estructuradas usando preguntas capciosas para ayuda a dirigir el progreso de los estudiantes. Use preguntas que les den a los estudiantes algunas prescripciones sobre cómo formular sus propias preguntas y cómo modificar sus primeras ideas y mejorarlas.

Como ejemplo, considere el problema de la distribución de fondos de ayuda. Para una discusión más detallada, diríjase al Apéndice C.

Los huracanes, terremotos, inundaciones, tornados, accidentes industriales, accidentes de aviación y otros desastres similares ocurren con inquietante regularidad y causan la pérdida de propiedad, sufrimiento personal y algunas veces la pérdida de vidas. Tras un desastre natural, gobiernos locales o nacionales (u organizaciones privadas) pueden crear un fondo de ahorro (o acopio de ropa, tiendas, comida, etc.) dedicado a ayudar a las personas o comunidades afectadas por la tragedia a través de la reconstrucción o el manejo de pérdidas. Por desgracia, el capital de estos fondos no es, con frecuencia, lo suficientemente cuantioso para cubrir todas las peticiones legítimas que son hechas para la disposición del dinero asignado a aliviar el sufrimiento.

Inventa un sistema justo para que el administrador del fondo distribuya la cantidad total de E dólares a los peticionarios.

PROBLEMA 3.5: DISTRIBUCIÓN JUSTA DE FONDOS DE AYUDA

Para los modeladores expertos, el planteamiento anterior puede ser todo lo que necesitan para comenzar. Los estudiantes crearán sus propios ejemplos y desarrollarán diversos procedimientos para comparar. Pero para los principiantes, esto sería totalmente agobiante. Así que, empecemos con poco a través del uso de preguntas exploratorias para que los estudiantes las consideren. Hacemos que el problema sea similar a algunos ejercicios que ellos han trabajado en el pasado, pero con algunas preguntas abiertas al final.

Puede empezar dándoles a los estudiantes una lista de métodos posibles (Problema 3.6) para que los analicen y discutan. Esto limita su creatividad, pero les brinda sugerencias de posibles rutas para solucionar el problema y les ayuda a sentirse gradualmente más cómodos con problemas cada vez más abiertos, despejando el camino hacia una modelación más creativa más adelante. No tema graduar el trabajo de esta forma desde el inicio, pero no continúe haciéndolo por siempre. El apoyo gradual es una ayuda a la modelación, en particular al comienzo, pero la verdadera modelación viene solamente después de que esta ayuda es suprimida.

Después de que los estudiantes han considerado la definición de justicia subyacente en cada modelo, pídales crear un ejemplo que pueda ilustrar una debilidad en cada procedimiento.

¿Cómo maneja cada método más de una petición? Compare los métodos y decida cuál es el mejor. Supongamos que:

- Hay USD 1000 disponibles con solicitudes de A: 200, B: 400 y C: 600
- Hay USD 1000 disponibles con solicitudes de A: 1000, B: 1200 y C: 1600
- Hay USD 1000 disponibles con solicitudes de A: 800, B: 1000 y C: 1200

Finalmente, haga que los estudiantes desarrollen y defiendan su propio método para distribuir justamente los fondos.

Supongamos que el fondo de ahorros E equivale a USD 210 y el peticionario A tiene una solicitud comprobada de USD 160 y el peticionario B una de USD 100. Varios métodos han sido propuestos para distribuir los fondos necesarios. Para cada método, realice los cálculos indicados y anote dos o tres enunciados para describir en términos coloquiales la definición de justicia que ha sido usada.

- Patrimonio de entidades: cada peticionario debe ser tratado como una entidad y la cantidad E es dividida en partes iguales entre todos los peticionarios.

- Equidad de pérdidas: este método le da a cada peticionario una cantidad igual de pérdida. Si le damos a A un número a de unidades y a B un número b de unidades y tienen pérdidas iguales, tenemos las ecuaciones $a + b = 210$ y $160 - a = 100 - b$.

- Completar las peticiones: en este método, consideramos los fondos como fluidos, azul en nuestros diagramas, y las solicitudes como contenedores de vidrio cuyas alturas representan el tamaño de las solicitudes. Llenamos los contenedores que representan las solicitudes con el fluido, y así detenemos el llenado cuando se alcance el tope de un contenedor de solicitudes. El resto del fluido completa lo que resta para los demás peticionarios hasta que los fondos han sido distribuidos.

- Ganancias proporcionales: asigna a cada peticionario una cantidad proporcional al tamaño de su solicitud. Dado que la solicitud de A es USD 160 y la B es USD 100, la solicitud de A es 1.6 veces más que la de B, por lo que $1.6x + x = 210$.

PROBLEMA 3.6: DISTRIBUCIÓN JUSTA DE FONDOS DE AYUDA (CONTINUACIÓN)

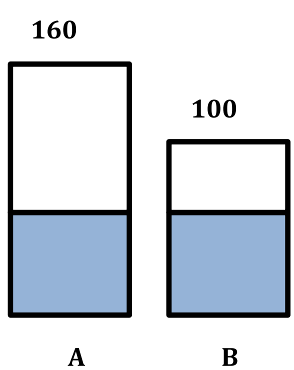


FIGURA 3.4: CANTIDADES PEQUEÑAS E IGUALES HAN SIDO DISTRIBUIDAS A LOS DOS PETICIONARIOS

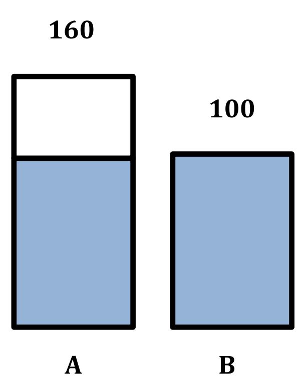


FIGURA 3.5: LA PETICIÓN DE USD 100 HA SIDO ALCANZADA

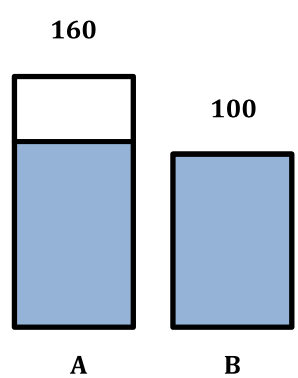


FIGURA 3.6: EL APOYO ECONÓMICO HA SIDO DISTRIBUIDO LO MÁS EQUITATIVAMENTE POSIBLE CON A OBTENIENDO 110 UNIDADES

Como se presenta aquí, este problema tiene algunas características de la modelación matemática y representa un punto medio entre un problema abierto y una tarea habitual. Los estudiantes necesitan tratar diversos métodos basados en diferentes suposiciones sobre lo que es justo. Cada procedimiento es correcto en relación con esas definiciones. Pero la estructuración del problema ayuda a dirigir la reflexión de los estudiantes a la ilustración de diversas formas bajo las cuales el problema puede ser considerado. Pedir otros métodos que no son parte del problema es una herramienta importante si la meta es preparar a los estudiantes para abordar actividades de modelación abiertas. Si se toman pasos pequeños de forma consistente, esto puede llevar a grandes logros.

El Apéndice C contiene un ejemplo extendido de este problema de división justa, con una variedad de métodos que van desde aquellos usados en la Edad Media hasta ideas modernas merecedoras del premio Nóbel. Además de los modelos, el problema presenta un vistazo bastante interesante a la historia del problema acompañada de bibliografía.

ESCALE EXPERIENCIAS INICIALES CON PREGUNTAS EXPLORATORIAS Y DISCUSIÓN DE CLASE

Puede empezar cada problema con pequeñas discusiones de grupo para ayudar a los estudiantes a comenzar. Después de la discusión inicial en grupos, reúnalos para una discusión en clase de forma que todos tengan un entendimiento claro del problema e ideas de cómo podrían aproximarse a él. Asegúrese de dejar algunas ideas sin discutir. Reunir a los estudiantes después de algo de tiempo trabajando los ayudará a seguir avanzando y les permitirá beneficiarse de las complicaciones que otros grupos han encontrado, así como de los avances que han hecho. Tratar a los grupos de estudiantes como equipos de investigación separados trabajando en diferentes direcciones, pero con la misma meta y compartiendo información, mantiene una atmósfera de comunidad y apoyo.

Como ejemplo, supongamos que introduce el problema del *Carrito de Hot Dogs* (Problema 3.7) a una clase de álgebra o geometría:

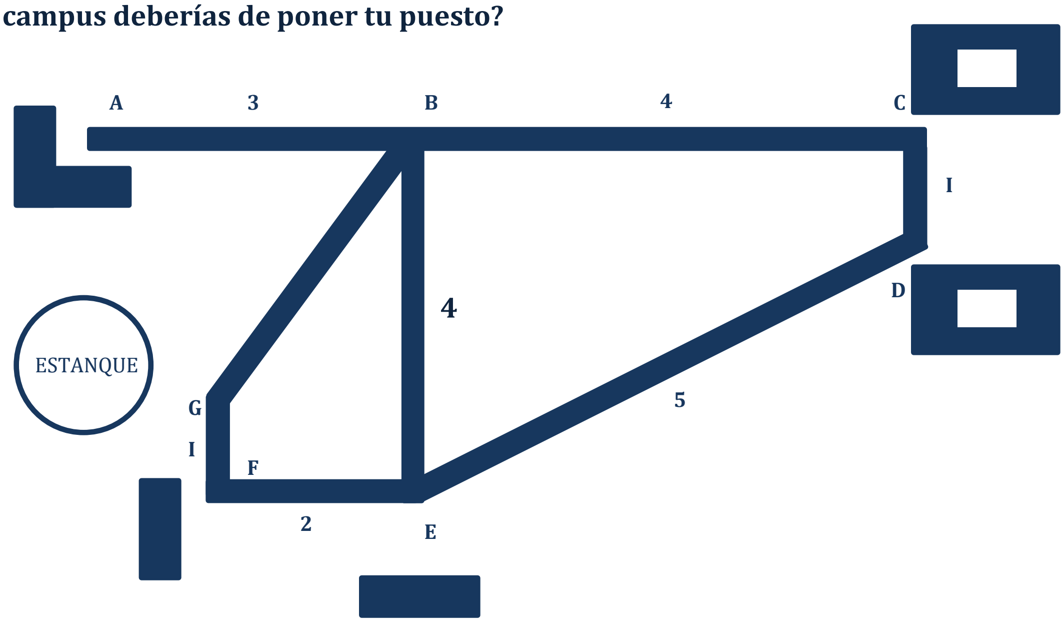
Haga que los estudiantes discutan el problema en grupos pequeños. Puede incitar la discusión al comenzar con algunas preguntas específicas:

> ¿Cuál es su definición de conveniente y cómo puede ser medido? ¿Qué quieren optimizar cuando pongan el puesto? Por ejemplo, ¿quieren tener la menor distancia promedio para los estudiantes? ¿Buscan la menor distancia máxima al puesto? Escojan algún punto del campus como el origen y determinen las coordenadas de las diferentes intersecciones. ¿Pueden encontrar el punto en el campus que tenga las coordenadas x y y promedio? ¿Esta ubicación les ayuda a responder la pregunta? ¿Qué otros criterios pueden ser usados?

Como en el problema de *¿Cuál computadora?* presentado anteriormente, los estudiantes deben tomar algunas decisiones. En este caso, será sobre cómo medir el concepto de conveniencia. Después de que los grupos aborden estas preguntas u otras similares, deben tener varias ideas diferentes sobre cómo proceder. Ahora, cambie el problema solo un poco y observe si pueden usar una o dos de sus ideas previas para abordar el problema actualizado

.

El mapa de una porción de un campus universitario es mostrado abajo. El mapa muestra las sendas peatonales y los dormitorios en esta sección del campus, además de las distancias aproximadas en una escala de 1 a 100 metros entre las ubicaciones, siendo la distancia entre el dormitorio D y el dormitorio E de 500 metros. Tu compañero de cuarto está convencido de que abras tu carro de salchichas durante la hora del almuerzo los fines de semana en una de las intersecciones a lo largo de las sendas. A ti te gustaría que la ubicación fuera lo más conveniente posible para los estudiantes. ¿En qué lugar del campus deberías de poner tu puesto?



PROBLEMA 3.7: EL CARRITO DE HOT DOGS

Los dormitorios están localizados en las posiciones A, C, D, E y F y el número de estudiantes en cada uno es 200 en A, 300 en C y en D y 100 en E y en F. Te gustaría que la ubicación sea lo más conveniente posible para los estudiantes. ¿En qué lugar del campus debes poner tu puesto?

Otras modificaciones: ¿cómo cambiaría tu elección de ubicación si supieras que los dormitorios A y C son de mujeres y los D, E y F son de hombres y que además a 30% de las mujeres y al 80% de los hombres les gustaría comer en tu puesto? O supón que las sendas entre B y C y entre E y D son cuesta arriba y es dos veces más difícil caminar cuesta arriba que cuesta abajo.

Trabajar con una serie de preguntas como éstas ayuda a los estudiantes a ver cómo diferentes preguntas y medidas pueden llevar a soluciones distintas. Al incrementar sistemáticamente la complejidad del escenario, los estudiantes se sienten más cómodos repitiendo el modelo e incluyendo nuevas condiciones más desafiantes.

USE PREGUNTAS COMUNES DE TODOS LOS DÍAS PARA MOTIVAR EL USO DE LAS MATEMÁTICAS

Como se señaló anteriormente, los problemas pequeños de modelación pueden servir para aprender nuevos contenidos y procedimientos. La probabilidad, la estadística y el trabajo con datos juegan un papel importante en la vida moderna y estos temas son cada vez más importantes en la preparación de los estudiantes para el trabajo y la universidad. La modelación matemática y las simulaciones pueden dar vida a estos temas para los estudiantes, y pueden llevar al entendimiento sin el enfoque formal que con frecuencia ha retrasado el estudio de estos temas. Un pequeño ejemplo puede ilustrar el poder de la modelación simulada y proporcionar una introducción a un análisis más formal.

Muchas veces, los deportes son un punto central de la experiencia en la educación media superior. Ya sea que los estudiantes estén en equipos o estén interesados en competencias atléticas, el desempeño o falta de éste de los equipos escolares es un denominador común para ellos a lo largo de la escuela, con mucha emoción generada si el equipo llega a las eliminatorias. Estas últimas vienen en muchas formas y el problema de *Playoffs (Las Rondas Eliminatorias)* investiga el efecto del número de juegos en la probabilidad de que el equipo más débil produzca una victoria sorpresiva.

El Gran Tazón se decide a través de un solo partido de eliminación por el título del campeonato de la Liga Nacional de Fútbol Americano. En béisbol, la final de la Serie Mundial es una ronda eliminatoria que se decide con los mejores juegos de 7, como las Finales de la NBA (*Asociación Nacional de Baloncesto*). La WNBA (*Asociación Nacional de Baloncesto Femenil*) define su campeonato con los mejores juegos de 5. En el tenis femenil, las finales del US Open (*Abierto de E. U.)* es una serie definida por los mejores juegos de 3, mientras que para los hombres se define con los mejores de 5. El ganador de una serie es el equipo que gana la mayoría de los juegos. ¿Es una victoria sorpresiva más posible con series largas o cortas?

PROBLEMA 3.8: EL PROBLEMA DE LOS PLAYOFFS

En el nivel introductorio, los estudiantes pueden simular el proceso de jugar los mejores juegos de una serie del deporte que se tome de ejemplo, usando el generador de números aleatorios de una calculadora. En esta situación, es mejor presentar un problema más específico, dado que necesitamos valores numéricos en nuestra simulación. Por ejemplo, el equipo A juega contra el equipo B diez veces en el curso de una temporada y gana 4 de los juegos. Se encuentran de nuevo en la serie de campeonato. ¿El equipo A tendrá una mejor oportunidad de ganar si juegan un solo juego por el campeonato o si juegan una serie decidida por los dos mejores juegos de 3?

Dado que el equipo A ha ganado 40% de los juegos previos, asumimos que la probabilidad de que el equipo A gane un juego es 0.4. Con una calculadora gráfica, los estudiantes pueden seleccionar un número aleatorio x, dentro del intervalo $(0, 1)$. Si $x \leq 0.4$, entonces el equipo A gana el juego, mientras que si $x > 0.4$ el equipo B gana. Esto asegura que el equipo A gane aproximadamente 40% de los juegos individuales. Al juntar su trabajo individual, los estudiantes pueden jugar una serie de 100 juegos individuales por la victoria y 100 series de 3 juegos por la victoria y determinar que el equipo A tiene una probabilidad ligeramente mejor de ganar una final decidida por un solo juego que una final decidida por los dos mejores juegos de 3. Simulaciones similares pueden demostrar el hecho de que cuanto más larga sea una serie, es menos probable que el equipo más débil obtenga una victoria inesperada.

Las simulaciones son muy buenas para ilustrar las dinámicas de una situación de modelación y para desarrollar la intuición de los estudiantes en situaciones probabilísticas. Sin embargo, no permiten a los estudiantes ver por qué las situaciones son de esa forma. Para entender los principios subyacentes que se exhiben en la simulación, un modelo más abstracto debe ser desarrollado. La simulación es un buen comienzo para inspirar a los estudiantes a preguntar sobre por qué la simulación resulta de ese modo.

USE ESCENARIOS DE MODELACIÓN PEQUEÑOS EN LAS PRESENTACIONES DE CLASE PARA AÑADIR UN COMPONENTE DEL CICLO DE MODELACIÓN A PROBLEMAS HABITUALES

Construir un ciclo de modelación completo toma tiempo y experiencia. Los estudiantes pueden desarrollar esa experiencia al trabajar consistentemente con problemas en clase y tareas que involucren pequeñas decisiones y piezas del proceso de modelación como actividades diarias. El problema de *La Mantis* que se muestra a continuación parece ser un problema estándar de ajuste de curvas, muy parecido a como el problema del *Tiro Libre* parecía ser un sistema estándar de ecuaciones lineales. Sin embargo, los estudiantes deben tomar algunas decisiones importantes acerca de cómo manejar los datos y desarrollar una función para representar la historia contada por estos. Aun así, no hay muchas opciones diferentes disponibles para ellos, así que el problema no es totalmente abierto y encaja apropiadamente en una lección normal de clase.

La mantis es un insecto pequeño y rastrero muy parecido a las cucarachas. Las mantis son usadas en estudios biológicos porque se mueven muy lentamente, así que es fácil seguirles el rastro. Las mantis se mueven principalmente para buscar alimento. Los investigadores han estado estudiando la relación entre la distancia que una mantis viaja por comida y la cantidad de comida que se encuentra en el estómago de este insecto. La distancia es medida en milímetros y la cantidad de comida en centigramos, una centésima de gramo. En el estudio, la comida fue colocada progresivamente más cerca de una mantis y la distancia en la cual la mantis empezó a moverse hacia la comida fue registrada. La cantidad de comida en el estómago de la mantis también fue medida. Las mediciones correspondientes a 15 mantis son dadas a continuación:

ALIMENTO (cg)	11	18	23	31	35	40	46	53	59	66	70	72	75	86	90
DISTANCIA (mm)	65	52	44	42	34	23	23	8	4	0	0	0	0	0	0

Con base en los datos proporcionados, determina la relación funcional entre la cantidad de comida en el estómago de la mantis y la distancia que recorrerá para alimentarse. Los biólogos llaman umbral de hambre a la cantidad de comida en el estómago con la cuál un animal empezará a buscar alimento. Con base en tus funciones, ¿cuál es el umbral de hambre de la mantis?

PROBLEMA 3.9: EL PROBLEMA DE LA MANTIS[12]

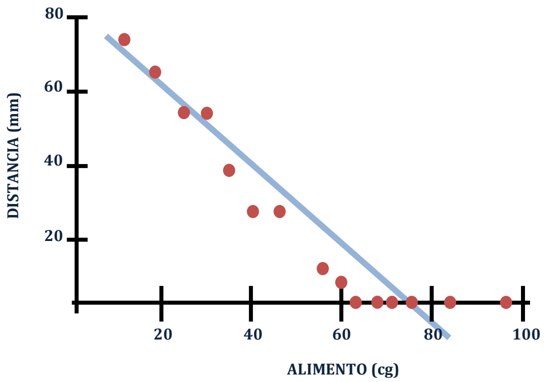


FIGURA 3.7: MODELO LINEAL

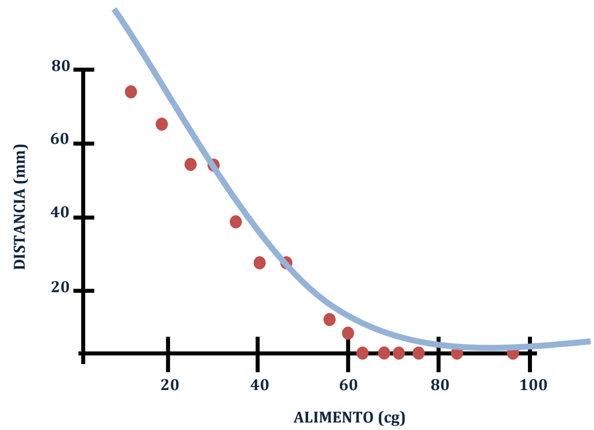


FIGURA 3.8: MODELO EXPONENCIAL

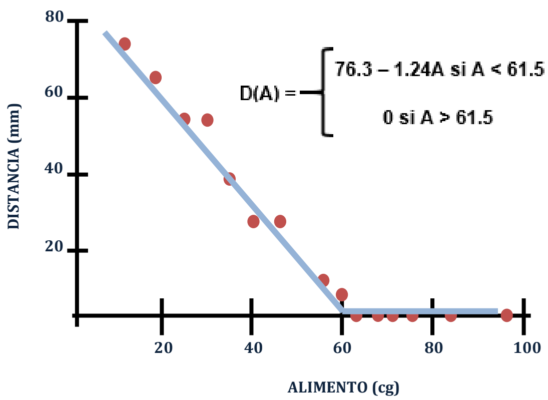


FIGURA 3.7: MODELO DE FUNCIÓN DIVIDIDA POR PARTES

Este problema requiere que los estudiantes tomen decisiones sobre cómo usar las matemáticas para describir una relación entre las dos variables. Una decisión importante es cómo manejar todas las distancias iguales a cero que se muestran en la tabla.

Es muy común que los estudiantes observen la linealidad inicial y ajusten una línea a todo el conjunto de datos, obteniendo un modelo como el que se muestra a la izquierda. Otros pueden considerar el modelo exponencial mostrado a la derecha. Con frecuencia, hacer algunas preguntas capciosas ayuda a los estudiantes a ver que la larga serie de ceros en los datos no debe ser incluida en los cálculos del modelo de regresión, ya que el modelo busca representar la relación cuando la mantis está dispuesta a caminar.

Ayudar a los estudiantes a formar una expresión refinada del problema en el componente *Identificar y Especificar el Problema a Resolver* de la modelación es importante. Como se señala, el problema a resolver es qué tan lejos caminará la mantis cuando se desplaza por alimento. Después de todo, ya sabemos qué tanto se desplaza cuando no se mueve por comida. Esta nueva expresión del problema puede resultar en una limitación del dominio en el modelo o en una función dividida por partes como la que se muestra arriba. Esta parte del problema puede ser usada, ya sea como una oportunidad para recordar trabajo previo con funciones divididas por partes o como una introducción a estas importantes funciones, dado que ilustra apropiadamente una situación en donde tiene sentido.

En el *Problema de la Mantis,* a pesar de que existen diversas alterativas que los estudiantes pueden tomar para manejar los ceros, no hay muchas direcciones diferentes que los estudiantes puedan seguir y no hay un verdadero seguimiento además de la discusión de distintas alternativas y cómo los estudiantes deciden cual es la mejor. Pequeñas actividades de modelación como éstas pueden encajar adecuadamente en el flujo normal de la clase y pueden ser usadas para ayudar a introducir material nuevo, aclarar algunos aspectos que puedan ser confusos para los estudiantes, o ilustrar cómo nuevos procedimientos pueden ser aplicados o cómo material enseñado en secciones separadas del curso puede ser combinado.

Muchos proyectos de modelación más largos y más extensivos requieren la combinación de diversos modelos pequeños, por lo que problemas pequeños como éste pueden ayudar a los estudiantes a ganar confianza y experiencia en sus decisiones de modelación.

DIFICULTADES QUE ANTICIPAR EN MEDIA SUPERIOR

Como señalamos en la sección dedicada a primaria y secundaria, los niños desarrollan a menudo la idea equivocada de que una solución rápida es la mejor y de que todo problema tiene solo una respuesta correcta. Los niños no están solos en esto. Sus padres con frecuencia comparten las mismas ideas acerca de los ingredientes del éxito matemático. Por lo tanto, los estudiantes pueden encontrar frustrante la modelación mucho antes de que la encuentren liberadora. Y entre más avanzados se encuentren los estudiantes, más dificultad puede haber, ya que por lo general se encuentran muy bien preparados para soluciones rápidas y un único camino correcto lo cual les resultará en muchos años de éxito con las rutinas comunes. A menudo, los estudiantes avanzados son bastante competentes en reproducir las soluciones y procedimientos del docente rápidamente y sin errores. Es posible que esperen saber de inmediato qué hacer cuando se enfrenten a un problema y quizás no hayan desarrollado estrategias para resolver qué hacer cuando carecen del conocimiento exacto en esa situación. De hecho, como fue señalado anteriormente por Zawojewski, Lesh y English, los estudiantes pueden sentir que la actividad es injusta dado que el docente nunca les enseñó cómo resolver el problema que se les pide solucionar. Y lo que es más importante es que los padres pueden sentirse de la misma forma. Las expectativas en un salón de clase rico en modelación matemática pueden ser muy diferentes de las del salón en el cual todo problema contiene toda la información necesaria, una solución buena y apropiada y donde todos los números deben ser precisos hasta la tercera posición decimal.

La modelación matemática ofrece una perspectiva distinta de las matemáticas y abre las puertas a una interpretación diferente de lo que significa ser bueno en matemáticas. La modelación puede también proveer un rango más grande de estudiantes con oportunidades para demostrar competencia y exhibir inteligencia de formas que no son siempre valoradas en la clase de matemáticas. Por ejemplo, los pensadores originales, o los estudiantes que son mejores investigando y escribiendo que en matemáticas, pueden hacer contribuciones importantes.

Así como la sofisticación matemática de los estudiantes se incrementa conforme avanzan en media superior, el nivel de habilidad y experiencia de sus docentes también se incrementa en los niveles más avanzados. Los docentes de Matemáticas de estos niveles han pasado mucho tiempo aprendiendo la materia a través de matemáticos durante sus estudios universitarios. Esta extensa experiencia en matemáticas universitarias es algo bueno, pero puede crear problemas substanciales con respecto a la modelación. La experiencia instruccional de los docentes que obtienen una especialización en matemáticas a menudo presenta un gran desequilibrio que favorece la atención a aspectos teóricos de las matemáticas en comparación con la atención a aplicaciones y modelación. Aunque esto está cambiando lentamente, la modelación matemática se encuentra actualmente ausente en muchas experiencias universitarias y las aplicaciones que muchos estudiantes de matemáticas revisan son limitadas exclusivamente a las ciencias físicas y la ingeniería. Como consecuencia de estas experiencias como estudiantes, los docentes pueden considerar las matemáticas como una herramienta de las ciencias matemáticas, pero no necesariamente útiles para los negocios, las ciencias biológicas, las ciencias políticas, la sociología y otras ciencias sociales. Las matemáticas pueden ser también una herramienta importante en las humanidades y las artes. Las matemáticas son verdaderamente para todos.

Nuestro enfoque actual de las matemáticas, con énfasis en lo mecánico y separada de aplicaciones significativas excluye a muchos estudiantes creativos y matemáticamente competentes.

Al enfocarse primariamente en física e ingeniería, podemos presentar una visión muy estrecha de la aplicabilidad de las matemáticas que excluye los intereses de muchos estudiantes capaces, los cuales no se ven a sí mismos como futuros físicos o ingenieros, pero que pueden usar productivamente su talento matemático en una variedad de campos distintos. Nuestro enfoque actual de las matemáticas, con énfasis en lo mecánico y separada de aplicaciones significativas excluye a muchos estudiantes creativos y matemáticamente competentes.

La modelación matemática en la educación media superior puede cambiar este enfoque limitado y limitante del campo de las matemáticas al ilustrar el poder que los modelos matemáticos tienen para ganar conocimiento sobre áreas importantes de naturaleza humana y al proporcionar a los estudiantes efectos energizantes, e incluso estimulantes del descubrimiento matemático creativo. Vale la pena repetirlo: las matemáticas son para todos.

Los docentes cuya educación matemática fue primariamente abstracta y teórica pueden también tener dificultades con las diferencias de la modelación con la matemática formal en la que han sido entrenados. En las matemáticas, si un teorema tiene varias condiciones y una de ellas no es satisfecha, dicho teorema se vuelve inútil. En estadística, un tema cuyo núcleo es la modelación del mundo a través de las matemáticas, tenemos teoremas poderosos cuyas condiciones no son satisfechas nunca y sin embargo los usamos de todas formas. Si las condiciones de un teorema están casi satisfechas, entonces se espera que las conclusiones sean aproximadamente correctas. El estadístico George Box escribió la siguiente aseveración, que es citada frecuentemente, extraída de su texto seminal sobre el diseño de experimentos, *Estadística para Investigadores*[13]: “lo máximo que puede ser esperado de cualquier modelo es que pueda proveer una aproximación útil de la realidad: Todos los modelos están mal; algunos modelos son útiles”. No obstante, a medida que los estudiantes avanzan hacia los niveles educativos superiores adquirirán nuevas herramientas matemáticas que les permitirán obtener aproximaciones más realistas del mundo que les rodea, a pesar de lo poco claros que este mundo y sus problemas puedan ser.

4. MODELACIÓN MATEMÁTICA A NIVEL UNIVERSITARIO

INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores, discutimos cómo la modelación matemática puede ser incluida en el currículo de preescolar hasta media superior. No obstante, el escenario de las matemáticas universitarias permite también la introducción de cursos de modelación completos. Estamos firmemente convencidos de que uno de dichos cursos debe estar disponible para los estudiantes de los primeros semestres y por lo tanto comenzamos esta sección discutiendo las características de un curso de modelación matemática que no requiere matemáticas propedéuticas más allá de las incluidas en el currículo de la educación media superior. También discutimos y argumentamos cómo hilar problemas abiertos de modelación matemática dentro del currículo universitario de las carreras de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés), más allá del nivel introductorio.

Creemos sinceramente que la modelación ganará un lugar más prominente en la educación matemática en todos los niveles. Por ende, pensamos que este capítulo será útil no solo para el cuerpo docente universitario de matemáticas, sino para los educadores en general, ya sea que enseñen cursos con contenido matemático o no.

Concluimos repasando nuestros Principios Guía para ver cómo estos se relacionan con la modelación matemática que realizamos a nivel universitario.

UN CURSO INTRODUCTORIO SOBRE MOTIVACIÓN PARA LA MODELACIÓN MATEMÁTICA.

Considere la audiencia de estudiantes que tomarán únicamente un curso de matemáticas durante su carrera universitaria e imagine que se le ha pedido desarrollar dicho curso. ¿Qué debería incluir? Antes de contestar esta pregunta, considere las incógnitas a 3 y a 20 años.

INCÓGNITA A 3 AÑOS

¿Qué habilidades pueden ser importantes para los estudiantes durante el resto de su carrera universitaria?

INCÓGNITA A 20 AÑOS

¿Qué espera que los estudiantes recuerden de su clase después de 20 años de que la hayan tomado?

Bajo el contexto de estas dos incógnitas, proporcionar a los estudiantes la oportunidad de desarrollar no solo una apreciación por la aplicabilidad y la utilidad del ramo, sino por el conjunto de habilidades transferibles, tiene el potencial de tener mucho más impacto en sus futuros que enseñarles un conjunto específico de habilidades matemáticas aisladas de su aplicación, como las correspondientes al álgebra universitaria. Aunque las habilidades matemáticas específicas de un curso universitario puedan ser olvidadas con facilidad, la poderosa experiencia de afrontar un problema del mundo real puede ayudar a los estudiantes a desarrollar confianza y una tenacidad duradera, de modo que estén mejor equipados para abordar los retos imprecisos que se encuentran fuera del salón de clase. A través del proceso de investigar temas, donde comparan la confiabilidad de su fuente de información y hacen y justifican sus suposiciones, los estudiantes están forzados a tomar decisiones que importan a medida que forjan su camino hacía una de múltiples soluciones posibles, siendo esta experiencia particularmente poderosa para los estudiantes, en contraste con un curso típico de matemáticas en el cual solo existe un camino correcto para llegar a una respuesta certera y única. Adicionalmente, después de completar este curso, los estudiantes tendrán la oportunidad de observar la amplia aplicabilidad y valor de las matemáticas a través de experiencias de primera mano. Incluso si ellos mismos nunca escogen usar las matemáticas para resolver un problema después del curso, será más probable que contraten a un matemático para resolver un problema que encuentren en su negocio, votar como funcionarios electos para que se otorgue presupuesto para las ciencias matemáticas y motivar a sus propios hijos a que disfruten del estudio de las matemáticas.

El tema central de las aplicaciones puede ser seleccionado para aprovechar el interés y el entusiasmo de sus estudiantes.

El tema central de las aplicaciones puede ser seleccionado para aprovechar el interés y el entusiasmo de sus estudiantes. Los temas interdisciplinarios pueden ser seleccionados con base en las carreras populares en su institución, en intereses nacionales o en retos globales. Los estudiantes pueden resolver problemas que encuentren en un curso de modelación usando las habilidades matemáticas que ya tienen o pueden desarrollar habilidades nuevas en el contexto dado. Por lo tanto, no tienen que imponerse prerrequisitos para un curso semejante.

En un curso de modelación matemática, el foco central es más amplio que solo las matemáticas o incluso el proceso de modelación. Éste crece para incluir habilidades transferibles. Dentro del desarrollo de un curso, usted puede decidir cuáles son las metas para el nivel de exposición y dominio de cada una de las habilidades transferibles que se enumeran a continuación.

DESGLOSAR PROBLEMAS LARGOS E IMPRECISOS PARA GENERAR PREGUNTAS MANEJABLES

Muchas de las preguntas del mundo real son complicadas. Tal vez, ni siquiera se sabe con claridad qué pregunta está siendo realmente planteada. De inicio, puede ser intimidante para los estudiantes investigar estas preguntas. Pensar en qué cantidades importan más y cómo pueden estar relacionadas es una habilidad valiosa que los estudiantes pueden usar a lo largo de sus vidas. Los estudiantes deben encontrarse motivados para realizar suposiciones defendibles y reducir el problema más grande a uno que pueda ser resuelto. Al resolver este problema más pequeño, serán capaces de generar entendimiento que le ayude a abordar el problema original. Enfocarse en esta habilidad prepara a los estudiantes para aplicar el proceso de modelación fuera de su curso, donde los problemas no son presentados de una forma que apunte necesariamente hacia una aproximación matemática.

Los estudiantes que resuelven el problema de *Manejando por Combustible* en el Capítulo 1 tienen que generar un cuestionamiento manejable con el objetivo de progresar hacia la respuesta de la pregunta. Otro ejemplo que demuestra esto es el *Problema del Ascensor* (Problema C.1), que aparece en el Apéndice C. Esta pregunta pide a los estudiantes que determinen cómo se deben programar los ascensores para que los trabajadores realicen sus labores eficientemente.

IDENTIFICAR Y USAR RECURSOS CONFIABLES

Muchas preguntas requieren que los estudiantes realicen algo de investigación para entender el problema y para adquirir conjuntos de datos para usar dentro de sus modelos. Es importante que los estudiantes adquieran la habilidad de buscar en Internet y en la biblioteca para encontrar fuentes de información y para medir la confiabilidad relativa de dichas fuentes. Algunas veces, los datos reales se encuentran incompletos, o el juego de datos más completo disponible es también reconocido por estar sesgado en una dirección particular; los estudiantes pueden usar el análisis de sensibilidad para explorar cómo el uso de datos sesgados puede afectar sus resultados. Enfocarse en esta habilidad prepara a los estudiantes para volverse personas aptas para resolver problemas de forma más independiente, a medida que sean capaces de encontrar recursos y aprender por su cuenta. También les da confianza para usar datos reales incluso cuando saben que estos pueden tener imperfecciones.

TRABAJAR EFECTIVAMENTE EN GRUPO

Los problemas realmente desafiantes son abordados más efectivamente a través de la colaboración, ya que los estudiantes llevan sus propias ideas al proceso de modelación. Por ende, un curso de modelación puede ser el lugar perfecto para que los estudiantes practiquen efectivamente el manejo de las dinámicas del trabajo grupal, lo que incluye utilizar las fortalezas de cada miembro del equipo, así como explorar formas para influenciar las relaciones interpersonales y maximizar la productividad del grupo. Aunque el trabajo grupal puede conllevar retos, superarlos puede convertirse en una meta abierta del curso, en lugar de una distracción. Enfocarse en esta habilidad prepara a los estudiantes a laborar efectivamente con otros en el lugar de trabajo y, tal vez, en otros cursos universitarios.

COMUNICARSE EFECTIVAMENTE

Un paso importante en el proceso de modelación es comunicar nuestros resultados a otros. A medida que los estudiantes busquen comunicar sus ideas, es beneficioso que consideren las metas de su reporte, el nivel de detalle requerido, la audiencia, el nivel de formalidad y el medio de comunicación. Dependiendo de las metas de su curso y el marco del problema, la comunicación puede ser:

- imparcial o persuasiva;
- una presentación de los resultados o una discusión del proceso;
- dirigida a una audiencia técnica o general;
- formal o informal;
- dada de forma oral, escrita, visual o por medios mixtos.

En todos estos casos, pedir a los estudiantes que consideren cuál es el público que a ellos les interesa que sepa la respuesta a su pregunta, hace del trabajo de encontrar dicha respuesta más agradable y les recuerda que encontrar una solución no es siempre el fin del problema. También necesitan ser capaces de expresar sus ideas y sus soluciones efectivamente. El desarrollo de las habilidades de comunicación se transfiere directamente a otros cursos y al mercado laboral.

Estas habilidades, aplicables en una amplia variedad de escenarios, son precisamente del tipo que los empleadores pretenden encontrar en aquellos que buscan trabajo. Más aún, éstas son habilidades de vida que los individuos pueden usar para ayudarles a navegar mejor en la comunidad global en la que vivimos, la cual continuará presentando a las generaciones de estudiantes por venir, retos que aún no han sido imaginados.

IMPLEMENTACIÓN

Como con el desarrollo de cualquier curso, es importante considerar las metas de éste. Típicamente, como cuerpo docente de matemáticas, las metas de nuestro curso son una lista de conceptos matemáticos a entender y habilidades matemáticas a dominar; frecuentemente, estos temas están alineados con un libro de texto establecido en el área. Cuando se diseña un curso de modelación matemática, puede que aún se tenga metas matemáticas específicas en mente, pero el foco general está en el proceso de modelación en sí mismo, así como en el desarrollo antes mencionado de habilidades transferibles y hábitos mentales. Además, muchos libros de texto de modelación matemática están centrados de forma más cercana en modelos matemáticos específicos, como sustantivo, en lugar del proceso matemático, como verbo. Por ende, el diseño e implementación de un curso de modelación puede sentirse muy diferente al de otros cursos matemáticos. En esta sección, exploraremos las cuestiones relacionadas con el diseño e implementación de una clase centrada en la modelación matemática, específicamente la organización del contenido, las formas bajo las cuales los estudiantes se involucran con los problemas y las formas en las cuales usted, como instructor, puede facilitar el desarrollo y el aprendizaje del estudiante.

El Apéndice C incluye una variedad de problemas de modelación, cada uno con una discusión exhaustiva de cómo los estudiantes se involucran con estos problemas, cómo el cuerpo docente puede facilitar el proceso de modelación del estudiante y formas bajo las cuales los problemas pueden ser modificados para alcanzar objetivos de enseñanza específicos.

ORGANIZAR EL CONTENIDO

Tipo del modelo. Aunque hay muchos libros de texto cuyos títulos abordan la modelación matemática, muchos de estos están organizados por tipo de modelo (lineal, exponencial, etc.) y este enfoque presenta problemas potenciales para un curso sobre el proceso de modelación matemática. Para resaltar estos problemas, exploremos brevemente un ejemplo. Supongamos que está enseñando un curso organizado como se explica anteriormente y la clase está aprendiendo modelos lineales. Usted presenta una pregunta abierta, pero sus estudiantes se sienten obligados a usar un modelo lineal para resolver el problema. Aunque esto no es necesariamente malo, puede llevar a decisiones de modelación mediocres. Por ejemplo, mientras sus estudiantes buscan datos, puede que encuentren datos no lineales y los descarten, o aún peor, que los fuercen a encajar dentro de un modelo lineal. Por lo tanto, aunque puede parecer natural para nosotros como matemáticos organizar un curso de modelación examinando diferentes tipos de modelos, este enfoque puede ser peligroso si se implementa precariamente. Por ende, ofrecemos a continuación dos formas alternativas para organizar un curso, seguidas de algunas ideas para tomar en cuenta a medida que éste se desarrolla.

El proceso de modelación. En un curso donde el tema central es el proceso de modelación, es natural organizar el curso desglosando el proceso de forma que los estudiantes puedan practicar cada elemento individualmente antes de, finalmente, usar todas sus habilidades para resolver el problema completo. Recuerde que el proceso de modelación no es un conjunto de pasos numerados, dado que hay problemas para los cuales el proceso puede requerir repeticiones adicionales o una ordenación inusual de sus componentes. Por lo tanto, a medida que usted organiza su curso, puede hacer que los estudiantes se involucren con estos componentes de tal forma que usted considere que apoya mejor el desarrollo del dominio del proceso entero. A continuación, se dan tres casos de implementación de ejemplos en un curso como éste.

- Al inicio del curso, los estudiantes pueden leer el planteamiento del problema y practicar los primeros componentes del proceso de modelación al realizar una lluvia de ideas para obtener una lista de factores importantes, buscar fuentes de información relacionada con esta lista y referirse posteriormente a ella con base en su investigación, todo esto mientras dan seguimiento a sus suposiciones. Después de que los estudiantes tengan suficientes oportunidades para practicar estas acciones y se sientan cómodos con estas fases del proceso de modelación, pueden empezar a moverse a la fase de desarrollo y uso de modelos matemáticos.
- El cuerpo docente puede presentar a sus estudiantes la rúbrica sobre la cual los reportes serán evaluados de forma inicial en el curso. Antes de tratar de realizar un reporte por su cuenta, los estudiantes pueden leer y evaluar o calificar resúmenes ejecutivos, tal vez de estudiantes anteriores o algunos encontrados dentro de reportes gubernamentales publicados en línea.
- Los estudiantes pueden pasar una porción del curso examinando modelos matemáticos existentes y sus contribuciones, con el objetivo de identificar y recobrar las suposiciones que fundamentaron estos modelos. Posteriormente en el curso, pueden usar lo que han aprendido anteriormente y aplicarlo a nuevos problemas, construyendo y justificando sus propias suposiciones a medida que desarrollan sus modelos.
- Puede empezar el curso presentando a los estudiantes problemas menos abiertos y forjar su camino hacia otros más abiertos.

Enfoque temático. Otra forma de organizar el curso es que los estudiantes se involucren repetidamente en el proceso completo de modelación mientras que enfrentan retos cada vez más complejos enfocados en un tema central, como justicia social o sostenibilidad. Este tema debe ser idealmente seleccionado de tal forma que problemas relevantes puedan ser tomados de una variedad de disciplinas, resaltando la importancia de la amplia utilidad de la modelación matemática. El curso puede ser aún dividido en más unidades al explorar subtemas del tema central; por ejemplo, si se explora la sostenibilidad, tal vez una porción del curso se centre en sostenibilidad ecológica, otra en fuentes de energía y otra en políticas internacionales. De esta forma, los estudiantes pueden ver que la modelación llega a ser una herramienta poderosa para ayudarles a responder preguntas a lo largo de una variedad de subtemas dentro de una misma disciplina.

Otras consideraciones. Sin importar cómo decida organizar el curso, hay algunos modelos que se encuentran tan extendidos, como los modelos lineales, que quizás sea necesario que sus estudiantes se expongan a unos cuantos durante el curso; algunos de estos están enlistados a continuación.

Recuerde que enumeramos los problemas que presentan los cursos basados en modelos, tales como los estudiantes forzando datos no lineales dentro de un modelo lineal simplemente porque están contenidos en una unidad del curso. Sin embargo, ¡este inconveniente no significa que deba evitar los modelos lineales en su curso! En su lugar, puede dar a sus estudiantes un problema que los lleve, muy probablemente, a un modelo lineal. Una vez que llegan a sus resultados, puede hacer que la clase reflexione sobre las propiedades del modelo lineal que crearon, como, por ejemplo, cómo la tasa de cambio (o pendiente) influencia los resultados o cuál es la interpretación física de cambiar la intersección.

Los modelos y herramientas de modelación más comunes incluyen:

- Modelos lineales;
- Modelos no lineales, particularmente exponenciales, logarítmicos y polinomiales;
- Sistemas dinámicos discretos para modelar el cambio;
- Optimización;
- Estadística.

CRECIMIENTO DEL ESTUDIANTE

El estudiante progresa en su habilidad de modelación, no solo a través de la práctica sino al incrementar el arsenal de matemáticas que puede aplicar. Por ejemplo, muchos escenarios de modelación incluyen:

- Cambio
- Casualidad
- Encontrar decisiones óptimas
- Encontrar tendencias en conjuntos de datos
- Desarrollar estrategias para tomar decisiones donde el resultado y los beneficios para quien toma la decisión dependan no solo de lo que esta persona disponga, sino de las elecciones de uno o más actores.

Una experiencia de modelación puede ser diseñada para proporcionar tanto práctica en la modelación como crecimiento en las matemáticas necesarias para modelar y analizar estas situaciones. Cualquiera de los siguientes temas puede ser presentado a estudiantes que solo tengan preparación matemática de nivel medio superior. Un proyecto de modelación puede ser fácilmente incluido en cualquier tema.

Modelando cambio con sistemas discretos

Contenido: Los estudiantes usan el modelo simple de "el futuro es igual al presente, agregando el cambio" al hacer suposiciones sobre el cambio durante un periodo apropiado de tiempo discreto. Los estudiantes pueden entonces construir soluciones numéricas de ecuaciones en diferencia y sistemas de ecuaciones en diferencia usando hojas de cálculo. Ellos pueden examinar las implicaciones de su modelo en cuanto a estabilidad y crecimiento a largo plazo. Opcionalmente se pueden estudiar soluciones analíticas.
Ejemplo: Planeas invertir mensualmente para pagar por la educación de tus hijos. Quieres tener lo suficiente para retirar USD 2000 cada mes por 8 años, empezando dentro de 15 años. Construye un modelo para determinar cuánto debes invertir, a diferentes tasas de interés, suponiendo que dejas de invertir cuando tu primer hijo entra a la universidad.

Proporcionalidad y similitud geométrica

Contenido: los estudiantes usan las definiciones de proporcionalidad y similitud geométrica para construir modelos explicativos de comportamientos interesantes. Con una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, los estudiantes pueden examinar comportamientos tales como una de las reglas de oro que aparecen en un texto de educación vial, la cual recomienda 2 segundos entre automóviles a todas las velocidades. ¿Esta regla tiene sentido? ¿Es segura a todas las velocidades legales?
Ejemplo: el estándar de peso de la marina de los EE. UU. permite una constante de 5 libras para cada pulgada adicional de altura. Supón que dos marineros musculosos son geométricamente similares, pero uno es bajo y el otro alto. ¿Cuál tendrá mayor dificultad en cumplir el estándar? Construye un modelo que explique el peso en función de la altura para individuos geométricamente similares. Encuentra datos para probar tu modelo explicativo.

Ajuste del modelo
Contenido: Los estudiantes ahora tienen modelos que han formulado para explicar un comportamiento. ¿Cómo ajustan el modelo a un conjunto de datos? Los estudiantes aprenden diferentes criterios de mejor ajuste para determinar los parámetros de los modelos propuestos.
Ejemplo: Un estudiante ha razonado que el peso debería variar cúbicamente para individuos geométricamente similares. Dado un conjunto de datos, ¿Qué modelo cúbico se ajusta mejor a los datos? ¿Hay algún patrón de errores que resulte de su ajuste?

Modelación experimental (empírica)
Contenido: Con frecuencia, el comportamiento es muy complejo para ser explicado matemáticamente, pero examinando los datos se revela un patrón. Los estudiantes aprenden cómo construir una tabla de diferencias para adquirir entendimiento sobre la naturaleza de los datos. Si es apropiado, pueden suavizar los datos con polinomiales de grado menor, interpolación segmentaria o *splines* y otras funciones. Ellos examinan los errores residuales de su modelo empírico para refinarlo si es que una tendencia se hace evidente en estos errores. Frecuentemente, los estudiantes adquieren entendimiento sobre las causas subyacentes del comportamiento.
Ejemplo: Con los datos que representan los resultados de halterofilia de los últimos Juegos Olímpicos, construye un modelo *empírico* que *capture la tendencia de estos datos* para predecir el peso total levantado como función del peso del contendiente. Usa tu modelo para determinar, libra por libra, quién es el levantador de pesas más fuerte. Ahora usa la *similitud geométrica* para explicar este comportamiento.

Modelación con simulaciones
Contenido: Los estudiantes estudian la generación de números aleatorios y las simulaciones de Montecarlo. Primero, aplican las ideas de comportamiento determinístico, como el área bajo la curva, y después ideas del tipo probabilístico, como problemas de inventario y de formación de colas.
Ejemplo: Construye una simulación de Montecarlo para el juego de cartas Blackjack (veintiuno). Desarrolla y prueba una estrategia para jugarlo. ¿Cuál es el valor esperado de tu estrategia?

Modelación probabilística discreta
Contenido: Los estudiantes aprenden a analizar el comportamiento que varía de forma probabilística. Ellos pueden construir modelos de sistemas para determinar la confiabilidad de estos.
Ejemplo: Los leñadores desean usar medidas fácilmente disponibles para estimar cuántos metros de tablón de madera se extraen de un árbol. Supón que miden el diámetro del árbol a la altura de la cintura. Desarrolla y prueba un modelo que prediga los metros de tablón de madera que se obtendrán como una función del diámetro en centímetros usando modelos de regresión.

Optimización de modelos discretos
Contenido: Muchos escenarios requieren la mejor solución con un objetivo y límites dados. La programación geométrica lineal puede ser fácilmente enseñada. Los estudiantes pueden construir modelos para aproximar un comportamiento con una función lineal objetiva, sujeta a restricciones lineales.
Ejemplo: Construye el modelo de un portafolio de inversiones que maximiza el retorno anual de una cantidad específica mientras mantiene: una cantidad mínima en acciones, ahorros

líquidos dentro de límites específicos y la cantidad en acciones que no excede el total combinado en bonos y ahorros.

Modelación usando teoría de grafos
Contenido: Un grafo puede ser una herramienta poderosa para determinar comportamientos interesantes, como la conectividad.
Ejemplos: (1) Determina el número de Bacon de un famoso como Elvis Presley, Babe Ruth, etc. (2) El director técnico de un equipo recreativo de softball tiene 15 jugadores en su lista. Una alineación inicial requiere de 11 jugadores en posiciones específicas. Dadas las posiciones que cada uno de los 15 jugadores puede tomar, ¿es posible tener una persona en cada posición? Si es así, ¿de cuántas formas puede el director técnico asignar jugadores a cada posición?

Modelación con teoría de decisión
Contenido: Frecuentemente el resultado de una decisión es determinado parcialmente por el azar o la naturaleza. Al elegir entre las alternativas, ¿qué criterio es el apropiado?, ¿cómo medimos el riesgo inherente a su decisión? Los estudiantes aprenden criterios como valor esperado, minimax, maximin maximax, etc., que son apropiados en diferentes situaciones. Así mismo, aprenden a construir árboles de decisiones para modelar una elección.
Ejemplos: (1) ¿Deberías unirte a una red social como Facebook? Construye un árbol de decisiones para modelar tu decisión. (2) ¿Los ciudadanos de los Estados Unidos deben construir su propia jubilación a través de *401 K*[1] o deberían usar el Programa de Seguridad Social actual?

Modelando con teoría del juego
Contenido: En la teoría del juego, el resultado y los beneficios dependen no solo de la elección del responsable de la decisión, sino de las otras decisiones de uno o más jugadores. Los estudiantes pueden aprender juegos de conflicto total y parcial. Si la comunicación es posible en el escenario, movimientos estratégicos, incluyendo compromisos con relación a las primeras jugadas, amenazas y promesas, son opciones que deben ser consideradas por quien toma las decisiones.
Ejemplos: Investiga sobre la crisis de misiles en Cuba en 1962. Determina las posibles estrategias de los Estados Unidos y la Unión Soviética. Asigna valores ordinales a los resultados. ¿Cuál sería el resultado si cada lado jugara la estrategia maximín, o sea de forma conservadora? ¿Qué movimientos estratégicos están disponibles para cada jugador, tales como compromisos, amenazas, promesas y combinaciones? Ahora analiza la secuencia real de decisiones de cada país.

Familias de funciones y sus gráficas
Contenido: Los estudiantes aprenden a usar las gráficas de funciones como modelos para ganar conocimiento cualitativo de un comportamiento.
Ejemplo: Construye un modelo gráfico para analizar la siguiente frase: “el efecto de un impuesto sobre un producto puede parecer al principio como un incremento en el precio para el consumidor. Pero un incremento en el precio disminuiría la demanda y una demanda disminuida reducirá de nuevo el precio. No es seguro, por ende, que el impuesto realmente eleve el precio”[1].

1. *401K* es un plan de retiro estadounidense patrocinado por el empleador.

¿QUÉ HACEN LOS ESTUDIANTES EN UN CURSO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA?

A diferencia de un curso en temas tradicionales en el cual los estudiantes podrían escuchar lecciones o seguir ejemplos para resolver un conjunto de problemas, los estudiantes en un curso de modelación matemática enfrentan problemas grandes, abiertos y poco claros sin ningún ejemplo de libro de texto. Esto significa que los estudiantes pueden estar mucho más involucrados de forma personal. A medida que los estudiantes trabajan a lo largo del proceso de modelación, empiezan con una pregunta abierta, identifican los factores más importantes y desarrollan suposiciones razonables acerca de la relación entre estos factores. Encuentran fuentes de datos y dan un procesamiento previo a los mismos para darles una forma útil. Prueban sus modelos, examinan sus resultados, generan y justifican inferencias y conclusiones y después revisan sus suposiciones, realizan análisis de sensibilidad y refinan su modelo mientras que tratan de abordar el problema original lo mejor que pueden. Sintetizan sus conclusiones y reportan sus resultados apropiadamente, dirigiéndolo a la audiencia adecuada, con el tono y la formalidad correctos y usando el medio y el formato pertinentes. Sin un mapa del camino o un ejemplo de un texto o de sus notas, los estudiantes se enfrentan con el reto generado por la toma de decisiones durante cada etapa del proceso

Aunque los estudiantes deben hacerse responsables de sus decisiones a lo largo del proceso de modelación, no necesitan hacerlo en aislamiento. Como se menciona anteriormente, los problemas de modelación realmente importantes son mejor abordados por grupos de estudiantes que trabajan en conjunto de forma cercana. Al trabajar en equipos, los estudiantes tienen la oportunidad de que sus ideas individuales sean validadas o desafiadas respetuosamente por sus compañeros. También tienen la oportunidad de participar en la crítica reflexiva de ideas de otros grupos. Para ciertos problemas, particularmente aquellos para los cuales usted espera un conjunto diverso de enfoques, será de ayuda para los grupos trabajar durante un tiempo por su cuenta y después compartir sus ideas con toda la clase, dado que esto permite a los grupos que pueden haberse enfocado a trabajar con una sola perspectiva, a dar un paso atrás y revisar el problema con un punto de vista más amplio. Este enfoque de participación con toda la clase puede ser usado tempranamente durante el proceso de modelación, a medida que los estudiantes hayan identificado los factores clave y los supuestos, y al final del proceso, mientras que los estudiantes encuentran sentido a sus resultados dentro del contexto del problema final. Más aún, estas sesiones para compartir ideas llevadas a cabo con toda la clase pueden proporcionar una oportunidad para que los estudiantes practiquen su habilidad de comunicar sus ideas en un escenario informal.

Esta idea de compartir no tiene que estar restringida solo al salón de clases. En el espíritu del estudio interdisciplinario, los estudiantes pueden buscar recursos locales de datos al consultar con otros cuerpos docentes o representantes de negocios cercanos; también pueden aprovechar la biblioteca y el internet para obtener datos a partir de fuentes confiables como las agencias nacionales, por ejemplo NASA, ASGS y USDA en los Estados Unidos.

Darles a los estudiantes la libertad de definir problemas por sí mismos puede llevar a la generación de modelos genuinamente nuevos y creativos...

Debemos hacer hincapié en la importancia de que sus estudiantes conviertan cualquier problema poco claro en uno manejable, decidan qué datos necesitan para resolverlo y los encuentren por sí mismos. Darles la libertad de definir problemas por sí mismos puede llevar a la generación de modelos genuinamente nuevos y creativos, a diferencia de los cursos tradicionales donde los estudiantes simplemente trabajan con variaciones de los mismos problemas que han sido resueltos por muchas generaciones anteriores. Este impulso hacia la autosuficiencia puede causar que los estudiantes se sientan inicialmente inconformes e incluso rebeldes, pero a medida que empiezan a ganar terreno, el sentido de logro supera la dificultad y se sienten agradecidos por la experiencia.

ROL DEL CUERPO DOCENTE

Ahora que hemos presentado algunas ideas de lo que harían los estudiantes realmente en el curso, es importante abordar cómo usted, como desarrollador e instructor del mismo, puede apoyar a sus estudiantes en su trabajo y en su conversión en buenos modeladores. Aunque hay muchas formas bajo las cuales usted puede dar apoyo, abordamos a continuación los siguientes roles que asume el cuerpo docente involucrado en un curso como éste: desarrollador del problema, desarrollador de curso, facilitador de clase y asesor instruccional ("coach")

DESARROLLADOR DEL PROBLEMA

Tenemos la oportunidad de presentarles a los estudiantes preguntas que nunca hubiesen pensado que pueden ser respondidas con el uso de las matemáticas. Al inicio del curso, es importante que presente retos que tengan un balance entre ser lo suficientemente accesibles para que sus estudiantes ganen terreno y ser lo suficientemente abrumadores para que ganen un sentido de logro durante este proceso. A medida que desarrolla cada problema, debe considerar las siguientes preguntas:

- ¿Qué tan accesible, pero abrumador, es este problema para mis estudiantes?
- ¿Qué tan abierto vs. guiado es este problema?, ¿Qué tanto este problema imita los problemas imprecisos con objetivos poco claros que mis estudiantes probablemente enfrentarán en su vida?
- ¿Qué tan fácil será para mis estudiantes encontrar datos para este problema?, ¿Serán datos confiables, completos y/o formateados?
- ¿Hay uno o dos enfoques matemáticos obvios para este problema o hay una amplia variedad de enfoques matemáticos que sean igualmente factibles de ser usados por mis estudiantes? (El Apéndice C da buenos ejemplos de esto último)
- ¿Qué tecnología pueden necesitar mis estudiantes para abordar este problema?, ¿Están preparados para usar tecnología y tienen acceso a ella?
- ¿Cuál es el formato, nivel de formalidad, audiencia, y tono que mis estudiantes deben usar al reportar sus resultados para este problema?

Note que no hay respuestas correctas a las preguntas anteriores. En lugar de eso, la respuesta apropiada variará basándose en las metas de su curso, qué tan avanzado está en el mismo y la personalidad de los estudiantes particulares de su clase.

Si encuentra que sus estudiantes no se están involucrando con el problema de la forma que usted quisiera, éste puede ser fácilmente ajustado, incluso cuando los estudiantes ya están trabajando en él. Por ejemplo, si los estudiantes en verdad están teniendo dificultades, puede impulsarlos dándoles cierta dirección. Y si los estudiantes no se sienten desafiados por el problema, puede pedirles que discutan un punto de vista alternativo o que apliquen sus descubrimientos a otro problema. De igual forma, aunque la meta última es que los estudiantes desarrollen las habilidades y la confianza para enfrentar un problema muy abierto, puede decidir que sus estudiantes requieren inicialmente un poco más de dirección. Como instructores, podemos instintivamente anticipar todas las necesidades de nuestros estudiantes e incluir toda la información que necesiten. Sin embargo, esto disminuye su carga cognitiva y les roba la oportunidad de superar retos poco claros.

En términos de tecnología, los datos del mundo real raramente se prestan a soluciones amigables; por ende, exponer a sus estudiantes a software de fácil acceso, como Microsoft Excel® o sus equivalentes en software gratuito, puede permitirles abordar retos que serían irresolubles sin la ayuda de tecnología. Dependiendo de las metas y estructura de su curso, valdría la pena invertir tiempo para poner a sus estudiantes al tanto de opciones de tecnología más avanzada como paquetes matemáticos, estadísticos o lenguajes de programación. Es importante reconocer que el instructor necesitará invertir tiempo en desarrollar sus habilidades con estas herramientas y que este tiempo será a costa de otro material del curso. Nuevamente, no hay respuesta correcta para este balance. Lo incentivamos a tomar decisiones con propósito y consciente de estos contratiempos.

A medida que desarrolle problemas, podrá querer obtener ideas para problemas de recursos locales, como la facultad, los servicios universitarios (comedor, reciclado, instalaciones, etc.) o negocios locales. Si no está ligado a los problemas locales, existen diversos recursos para la modelación de problemas. El desarrollo de problemas es mucho trabajo y no hay necesidad de reinventar la rueda cuando hay muchos buenos problemas para que usted y su clase empiecen. Dado el panorama siempre cambiante del internet, algunos de estos recursos pueden no estar disponibles en un futuro indefinido, pero una búsqueda en internet puede ser recompensada por recursos adicionales.

- COMAP (www.comap.com): El Consorcio de Matemáticas y sus Aplicaciones es una organización sin fines de lucro que tiene diversos bancos de problemas en su sitio web:
  - HiMCM Competition Questions (Preguntas de Competencia): COMAP organiza una competencia de 36 horas de modelación matemática de nivel medio superior. A pesar de que estas preguntas están enfocadas a una audiencia de educación media superior, pueden ser modificados para encajar en su curso universitario. Todas las preguntas de años anteriores son publicadas y están disponibles gratuitamente.
  - MCM/ICM Competition Questions (Preguntas de Competencia): COMAP también organiza una competencia anual universitaria de modelación matemática (MCM) y una de modelación interdisciplinaria (ICM). Todas las preguntas de años anteriores son publicadas y están disponibles gratuitamente. Los comentarios del jurado y los trabajos ganadores están disponibles con una subscripción a COMAP.
  - Módulos: Matemáticas Universitarias y sus Aplicaciones (UMAP): Estos son módulos de enseñanza de las matemáticas que incluyen aplicaciones que pueden ser modificadas para convertirse en problemas para su clase. Están disponibles con una subscripción a COMAP.
  - Proyectos de Aplicaciones Interdisciplinarias Animadas (ILAPS): Estos son proyectos interdisciplinarios que incluyen comentarios completos para los instructores. Están disponibles con una subscripción a COMAP.
- Reto SIAM/M3 (m3challenge.siam.org):
  - Problemas del Reto M3: SIAM organiza una competencia de 14 horas de modelación matemática. Aunque esta competencia está enfocada al nivel medio superior, las preguntas pueden ser modificadas para satisfacer las necesidades de su curso universitario. Todas las preguntas anteriores están disponibles gratuitamente. Adicionalmente, el sitio ofrece acceso gratuito a ejemplos de las presentaciones de los estudiantes ganadores.
  - Problemas de Muestra e Idea del Mes (TOM) de M3: Para ayudar a los equipos a prepararse para el reto, el equipo de desarrollo de problemas de M3 también ofrece problemas de muestra con ideas tanto para estudiantes como para el cuerpo docente, así como TOMs, que son problemas donde hay oportunidad para estudiantes interesados y el cuerpo docente de discutir un problema con el

desarrollador de éste en un foro en línea. Todos estos recursos están disponibles gratuitamente.

> Modelación matemática: Primeros Pasos y Primeras Soluciones: Aunque este manual de modelación no fue diseñado para servir como una fuente de ideas de modelación, es una explicación accesible, gratuita en línea y detallada del proceso de modelación que puede ser valiosa tanto para usted como para sus estudiantes.

DESARROLLADOR DEL CURSO

A medida que usted desarrolla su curso, debe considerar qué habilidades transferibles y modelos matemáticos desea abordar. La organización del contenido y los tipos de reportes que requiera deben estar en su mayor parte formados por las metas primarias que tiene para los estudiantes en su curso. Puede ayudar si anota realmente sus respuestas a las incógnitas a 3 y 20 años y que las use para guiar el desarrollo general del curso. También querrá considerar el ritmo de éste. Dado que el proceso de modelación es elaborado, toma práctica juzgar el estatus del trabajo en elaboración. Por lo tanto, durante la primera ronda de enseñanza de un curso, sería mejor que los estudiantes se involucren con los problemas a lo que puede considerarse como ritmo lento, hasta que usted se encuentre más cómodo estimando su progreso.

Aunque hay claramente retos en el diseño de un curso de modelación matemática, es también una experiencia gratificante. Hay mucha flexibilidad en la selección de temas disciplinarios e interdisciplinarios, especialmente si es uno de los cursos finales. Es decir, no hay un curso requerido que siga al suyo, además de que no hay prerrequisitos. Como desarrollador del curso, usted tiene las extraordinarias oportunidades combinadas de llevar sus propios intereses y pasiones al salón de clases y aprovechar los intereses y pasiones de sus estudiantes, así como servirse de las áreas especiales de dominio en su campus universitario. Por ejemplo, si su escuela tiene un programa sólido de ciencias del mar o un laboratorio de egiptología reconocido mundialmente, puede querer trabajar con el cuerpo docente de estas áreas para desarrollar problemas de modelación alrededor de estos temas.

FACILITADOR DE CLASE

En el salón de clase, a medida que los estudiantes trabajan en grupos para abordar problemas desafiantes que usted ha desarrollado y presentado, frecuentemente entrará en el papel de facilitador. Este papel envuelve caminar alrededor del salón, escuchar las discusiones de los grupos y evaluar los niveles de productividad de cada uno de ellos. Cuando usted escucha a uno o más grupos dirigiéndose a una ruta de decisiones mediocres, puede ser muy tentador intervenir directamente, mostrarles el error de sus decisiones y señalarles mejores opciones, pero esto reprime la creatividad no solo en este problema, sino en problemas futuros, al suprimir la confianza de los estudiantes. Hay muchas soluciones alternativas, y mientras que usted decide cuál escoger, debe considerar el nivel de tenacidad actual de los grupos que avanzan con dificultad y decidir cuál es el nivel crítico de apoyo o guía necesitada para impulsarlos a que reconsideren sus pasos en falso. Una solución es usar el enfoque socrático con el grupo mismo, pidiéndoles que le justifiquen su trabajo o solicitándoles que consideren un ejemplo a un extremo que pueda resaltar los errores de su razonamiento actual. Con frecuencia, cuando un grupo comparte sus ideas mal concebidas en voz alta, son capaces de identificar los problemas y afrontarlos ellos mismos. Otro enfoque es llevarlos a una discusión con toda la clase en la que los grupos que tienen dificultades se puedan beneficiar de escuchar ideas de otros grupos, al mismo tiempo que obtienen retroalimentación de sus compañeros sobre los problemas con sus propias ideas. A lo largo de la experiencia en el salón de clase, es importante recordar que usted raramente estará dando una lección. Su papel primario es facilitar los esfuerzos de modelación.

Sin embargo, existirán momentos en los que sí deba tomar el podio y enseñar una lección. Por ejemplo, antes de que los estudiantes se internen en un proyecto en el cual necesitarán observar los datos y ajustar un modelo a estos, sería de ayuda dirigir un repaso de las familias de funciones y sus gráficas. Como otro ejemplo, si su curso está estructurado alrededor de componentes del proceso de modelación matemática, puede ser que usted quiera abrir cada unidad o capítulo con una pequeña lección sobre ese componente, incluyendo el proporcionar sugerencias sobre cómo hacerlo bien e identificar dificultades comunes que usted espera que los estudiantes eviten. Algunas dificultades comunes que vemos son:

- Si se les pide a los estudiantes que encuentren la mejor forma de hacer algo, pueden sentirse inclinados a idear algún tipo de puntaje que logre sus metas lo más económica y rápidamente posible. Al final, es posible que tengan un componente de costo y otro de tiempo en su modelo. Los modeladores inexpertos pueden decidir simplemente agregar estos componentes, llevándolos a sumar un término con unidades monetarias a un término con unidades en horas.
- Los estudiantes pueden involucrarse y emocionarse tanto con su modelo que olvidan que éste no es obvio para las personas ajenas a él. Se les tiene que recordar frecuentemente que, cuando presenten sus modelos de forma escrita, deben explicar sus ideas a una audiencia que no está familiarizada con su trabajo.
- El concepto de hacer suposiciones puede ser desconcertante para los estudiantes. No es poco común para los modeladores principiantes que incluyan todo lo que parezca una suposición, sea o no importante. Por ejemplo, en el problema de *Manejando por Combustible* del Capítulo 1, los estudiantes pueden incluir una oración como “suponemos que hay 16 horas de luz al día”. Esta suposición no debe ser incluida en este caso ya que es completamente irrelevante al modelo.

Más sugerencias y dificultades comunes pueden ser encontradas en el manual mencionado anteriormente, *Modelación Matemática: Primeros Pasos y Primeras Soluciones*.

ASESOR DE INSTRUCCIÓN (“COACH”)

Como se señaló anteriormente, algunos estudiantes tienen dificultades con la transición abrupta de lo que ellos pensaban que una clase de matemáticas debía ser a lo que encuentran en un curso de modelación matemática. Por ejemplo, observar al docente plantear ejercicios para los que haya un procedimiento claro y una única respuesta y después imitar el procedimiento para un conjunto de problemas, cada uno con una sola respuesta correcta. Entonces, se les proporciona un problema desafiante que puede parecer no contener matemáticas, con poco o nada de dirección más que la instrucción de que necesitan resolverlo todo por sí mismos. Esta transición, si no es apropiadamente apoyada, puede ser abrumadora al punto de ser incapacitante para los estudiantes. Adicionalmente, como se señaló anteriormente, en el mundo de la modelación matemática, las decisiones de los estudiantes tienen consecuencias en términos del trabajo hecho y los resultados de éste. La gravedad de estas consecuencias y el valor colocado en éstas ocasiona que el salón de clases esté mucho más cargado emocionalmente que durante una clase típica de matemáticas. Por lo tanto, tal vez uno de los papeles más importantes que tenemos como instructores es el de asesor o coach.

...uno de los papeles más importantes que tenemos como instructores es el de asesor o coach.

En el campo deportivo, el coach suele explicar las estrategias más importantes a su equipo, sabiendo que éstas necesitarán ser modificadas a medida que surjan, para abordar los retos únicos de cada partida. El día del juego, el coach no se une a jugar con su equipo, sino que se encuentra siempre tras bastidores, observando cuidadosamente el juego. Después de que todo haya terminado, el entrenador revisa lo ocurrido con su equipo y ofrece una crítica constructiva y retroalimentación para que aprendan de cada experiencia y se vuelvan más fuertes. Análogamente, debemos preparar a nuestros estudiantes dándoles una idea de qué esperar antes de que se les dé un problema; debemos decirles abiertamente que este curso será diferente y se sentirá diferente a cualquier otro curso que hayan tomado, que los sentimientos iniciales de frustración son normales y que, a lo largo del semestre, estos darán lugar a sentimientos de logro. Durante el proceso de modelación, o componentes de éste, debemos ofrecer retroalimentación detallada, profunda y oportuna a nuestros estudiantes. A lo largo de este proceso de retroalimentación, podemos facilitar el desarrollo de sus habilidades y proeza modeladora a través del semestre.

Un buen entrenador también conoce bien a sus jugadores. Sabe cuándo se beneficiarán más de una evaluación firme y honesta de un desempeño débil, en contraste con las situaciones en las que se beneficiarán más de una conversación alentadora. Considerando el alto nivel de inversión emocional en el escenario de una clase de modelación, también necesitamos trabajar para entender como involucrarnos mejor con nuestros estudiantes a medida que navegan los retos del curso.

EVALUACIÓN

Así como el diseño y la implementación de un curso de modelación matemática es diferente de un curso típico de matemáticas, la evaluación es también diferente. No hay un sistema de tareas en línea para la modelación y, aunque es fácil poner a prueba si los estudiantes saben la formula cuadrática y cómo usarla o no en un examen de 50 minutos, no es obvio cómo evaluar en qué medida los estudiantes conocen el proceso de modelación y lo aplican correctamente.

Afortunadamente, hay una variedad de formas para evaluar el aprendizaje de los estudiantes en un curso de modelación matemática, pero antes de discutir los métodos de evaluación es importante determinar qué es lo que usted planea evaluar. Recuerde que las metas de un curso de modelación matemática son multifacéticas y pueden incluir:

- El dominio en la aplicación de componentes individuales del proceso de modelación;
- El dominio en la aplicación del proceso completo de modelación;
- La habilidad de comunicar efectiva y apropiadamente los resultados;
- La habilidad de trabajar como miembro de un equipo;
- El desarrollo de la persistencia.

A continuación, describimos brevemente medios razonables para evaluar cada uno de estos criterios seguido de una discusión sobre cómo trasladarse del proceso de evaluación a la retroalimentación y, finalmente, a una calificación.

DOMINIO DE LOS COMPONENTES INDIVIDUALES DEL PROCESO DE MODELACIÓN

Aunque esto no es cierto para todos los componentes del proceso de modelación, ésta es una de las pocas metas del curso que verdaderamente puede ser evaluada con facilidad en un escenario de examen. Por ejemplo, para valorar la habilidad de los estudiantes de evaluar suposiciones, puede darles un problema, un modelo y una lista de posibles suposiciones. Posteriormente, puede pedirles a los estudiantes que identifiquen las suposiciones que son relevantes al problema o al modelo; podría pedirles que den justificaciones para esas suposiciones relevantes. Para evaluar las habilidades de los estudiantes en la evaluación del modelo, puede proporcionarles un problema, datos y algunos modelos matemáticos y después pedirles que califiquen los modelos y den su razonamiento para asignar dicha calificación.

DOMINO DEL PROCESO DE MODELACIÓN TOTAL

Aunque puede ser posible hacer que los estudiantes resuelvan un problema de modelación pequeño en una sola sesión de clase, un problema verdaderamente significativo de modelación toma tiempo. Además, los estudiantes descifrarán el problema y progresarán hacia una solución en una variedad amplía de ritmos, por lo que no sería razonable forzar el arduo trabajo de completar el proceso de modelación en una sola hora de clase para un examen que tenga lugar en el aula. Más aún, el proceso de modelación se lleva mejor a cabo en grupos. Por ende, los proyectos de grupo pueden ser la condición óptima para observar el dominio del proceso de modelación total de sus estudiantes

HABILIDAD PARA COMUNICAR EFECTIVA Y APROPIADAMENTE SUS RESULTADOS

El componente final del proceso de modelación es reportar sus resultados. Como instructor, usted puede decidir cuánta dirección debe proporcionar para el formato de entrega, si usted ha pasado tiempo significativo discutiendo la mejor manera de comunicar ideas con base en la audiencia, metas y el medio de comunicación, entonces puede que haga parte de la tarea determinar los detalles del formato correcto, como el nivel de detalle y la voz. Sin embargo, si no ha discutido esto, quizá usted deba guiar aún más a sus estudiantes en sus reportes, particularmente al comienzo del semestre. Los reportes, que pueden ser en grupo o individuales, ofrecen una oportunidad excelente para evaluar las habilidades de comunicación escrita; estos productos, si se comparten con la clase, permiten también dar a los estudiantes la oportunidad de ver cómo sus compañeros pueden haber tomado un enfoque diferente para resolver el mismo problema. Usted podría considerar el hacer que los estudiantes evalúen sus presentaciones entre ellos

HABILIDAD PARA TRABAJAR COMO MIEMBRO DE UN EQUIPO

Podría usted decidir que ésta no es una meta importante para su curso, y por ende puede escoger no evaluarla. Aunque es difícil desarrollar herramientas de evaluación concretas para medir el espíritu de equipo de un estudiante, usted puede concebir una evaluación más abstracta basada en observaciones de la dinámica en clase, y también puede pedirles a los estudiantes que proporcionen retroalimentación acerca de las interacciones de su grupo y las percepciones acerca de trabajar con cada miembro del equipo.

PERSISTENCIA Y OTROS HÁBITOS DE LA MENTE

Como ocurre con el trabajo en equipo, es difícil evaluar este criterio de forma concreta, sin embargo, usted puede hacer observaciones y proveer retroalimentación para mejorar.

ASIGNAR CALIFICACIONES

En la modelación matemática, no hay una respuesta correcta. Algunos enfoques y respuestas son patentemente mejores que otras, mientras que dos enfoques muy diferentes pueden, ultimadamente, demostrar niveles similares de competencia en la modelación. Esto puede hacer que calificar sea difícil.

Hay múltiples enfoques para calificar, y realmente depende de usted, como instructor, decidir cuál le funcionará mejor. Aquí hay algunos enfoques posibles para evaluar las entregas de los estudiantes:

Rúbrica del proceso. Usted puede desarrollar una rúbrica que identifique los componentes clave en el proceso de modelación, incluyendo aspectos específicos del problema. Para cada sección de la rúbrica, escriba el nivel de competencia que esperaría ver en un equipo que trabaje muy bien, un equipo que trabaje lo suficiente y un equipo que no trabaje muy bien. Al sopesar estos y asignar puntos a cada sección de la rúbrica, se puede determinar un puntaje numérico.

Rúbrica mínima/holística. A medida que lee cada reporte, usted puede simplemente decidir si el trabajo de sus estudiantes fue completamente claro, convincente y completo (trabajo de nivel A), cumplió con los estándares mínimos de la tarea (trabajo nivel C) o falló en realizar bien la actividad (trabajo nivel F), con reportes que caen entre A y C, ganando una B, etc.

Rúbrica detallada. Puede idear una rúbrica detallada que aborde cada paso que esperaría que un equipo encuentre en el proceso, incluyendo las respuestas correctas; sin embargo, en un problema realmente abierto, esta rúbrica no permitirá evaluar adecuadamente la diversidad de soluciones que puede encontrar. Por esta razón, disuadimos enfáticamente de asignar un número estricto de puntos a componentes de una idea preconcebida de la respuesta correcta.

Sin importar qué enfoque escoja para calificar, hay un par de ideas que vale la pena implementar para mejorar el aprendizaje del estudiante y las actitudes en el salón de clase, incluyendo las suyas:

- La retroalimentación es mucho más importante para promover el crecimiento que para calificar, así que asegúrese de proporcionar a sus estudiantes suficientes comentarios para que mejoren en tareas posteriores;
- Asegúrese de compartir con sus estudiantes sus normas y esquemas para calificar. Es importante que ellos entiendan cómo están siendo evaluados;
- Calificar proyectos escritos largos y detallados puede parecer una tarea abrumadora, pero no tiene que ser así. Genere una estrategia que le ayude a enfocar su esfuerzo y tiempo en las cosas que realmente quiere evaluar, reconociendo la relación entre su tiempo y la calidad y cantidad de retroalimentación que les proporcione a los estudiantes.
- Proporcionar retroalimentación provisional puede ayudar a los estudiantes a que no gasten una gran cantidad de tiempo dirigiéndose en la dirección equivocada o armando un producto insuficiente. Las oportunidades para evaluar trabajo parcialmente completo pueden ser informales, como discusiones a medida que camina por el salón de clase, o formales, como entrega de un borrador, una porción del escrito o de las matemáticas. El trabajo que se invierte en evaluar estas entregas provisionales puede mejorar la entrega final al punto de que el tiempo total usado en calificar es, de hecho, reducido.
- No todo proyecto necesita de un reporte escrito completo. Los estudiantes pueden empezar a sentirse agotados por el proceso de escritura y usted puede empezar a sentirse cansado de calificar, así que considere pedirles solamente un resumen ejecutivo. Alternativamente, puede optar por enfocar la evaluación de un proyecto en particular en una o dos secciones del reporte. Si hace esto, asegúrese de que sus estudiantes sepan donde concentrar sus esfuerzos.
- Considere tener una política de revisión obligatoria. Calificar proyectos puede ser molesto, especialmente si el trabajo requiere mucha retroalimentación. Si encuentra que

el proyecto tiene fallas significativas, puede considerar tener una conversación con el(los) autor(es) para proveer retroalimentación en persona y pedirles que lo revisen y lo vuelvan a entregar. La conversación probablemente no tome más que lo que tomaría dar retroalimentación escrita, pero les da a los estudiantes una oportunidad de participar en la conversación acerca de lo que usted valora en su trabajo, haciendo esta entrega y posiblemente aquellas que le sigan, significativamente mejores.

Para sugerencias adicionales, por favor vea el Apéndice D.

MODELACIÓN A TRAVÉS DEL CURRÍCULO STEM

MOTIVACIÓN

Al inicio de esta sección nos enfocamos en el desarrollo e implementación de un curso de modelación matemática para estudiantes no pertenecientes al currículo STEM, y las habilidades desarrolladas en dicho curso son igualmente importantes para los estudiantes de carreras STEM. Estas habilidades incluyen aquellas que son transferibles como: desglosar un problema, grande e impreciso, en una pregunta manejable; identificar y usar fuentes confiables; trabajar efectivamente en grupo; y comunicarse efectivamente.

Para las carreras STEM, particularmente las carreras no de matemáticas, los cursos de matemáticas requeridos pueden parecer no relacionados con sus metas disciplinarias y de carrera, especialmente si las matemáticas enseñadas carecen de aplicaciones significativas y relevantes. La comunidad de educación en ingeniería ha emitido recientemente llamamientos para la transparencia en cuanto a la relevancia de las matemáticas. Contextualizar las matemáticas en forma de preguntas de modelación ayuda a responder a este llamado para demostrar su relevancia a los estudiantes. Más aún, aprender matemáticas en contexto ha demostrado promover entendimiento más profundo y conceptual del material.

Por estas razones, se le debe dar a todas las carreras STEM oportunidades para involucrarse con los elementos de la modelación. Estas oportunidades pueden venir en forma de un curso de modelación matemática para carreras STEM o a través de la inclusión de actividades de modelación en el currículo STEM de matemáticas existente. Ambas opciones son discutidas en la siguiente sección.

IMPLEMENTACIÓN

Sabemos que muchos currículos STEM, particularmente en programas de ingeniería, están ya llenos de cursos, lo que puede hacer difícil añadir un curso completo de modelación. Por ende, la mayor parte de esta sección aborda formas para incluir modelación matemática dentro del currículo STEM de matemáticas estándar, pero antes señalaremos brevemente algunas consideraciones para aquellos de ustedes que puedan tener o estén considerando agregar un curso de modelación matemática para todas las carreras STEM, no solo las carreras de matemáticas.

Un curso de modelación matemática para las carreras STEM. El Comité MAA 2015 en la Guía Curricular del Programa Universitario en Matemáticas incluye recomendaciones para el desarrollo de un curso de modelación matemáticas para carreras de matemáticas, pero las habilidades en modelación abordadas son también importantes para las carreras STEM no de matemáticas. Al considerar un curso de modelación matemática completo para todas las carreras STEM, existen diferentes beneficios dependiendo de su ubicación en el currículo. Específicamente, un curso temprano provee a los estudiantes de un fundamento en modelación que puede ser aprovechado a lo largo del currículo. Alternativamente, un curso posterior en el currículo puede hacer uso de un conjunto amplio y más maduro de herramientas matemáticas, incrementando la complejidad y diversidad de los problemas que los estudiantes pueden enfrentar. Idealmente, la modelación matemática debe ser algo que los estudiantes vean a lo largo de todo su currículo universitario, de modo que, aunque exista un curso de modelación de nivel superior, la experiencia curricular del estudiante STEM puede ser enriquecida también al incluir actividades de modelación en cursos STEM de bajo nivel, como cálculo, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

Modelación en Cálculo, Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales. La mayoría de los estudiantes de las carreras STEM toma al menos algunos cursos en la secuencia de cálculo, si no la secuencia entera, y muchos de ellos también toman ecuaciones diferenciales o álgebra lineal. Dada la amplia audiencia, estos cursos proveen escenarios óptimos para introducir a los estudiantes a la modelación matemática. En esta sección, presentamos cómo la modelación puede ser usada para facilitar las metas de aprendizaje existentes en estos cursos al discutir: dónde se puede usar la modelación en un curso, qué hacen los estudiantes cuando modelan y los papeles que usted, como instructor, tiene mientras ayuda a los estudiantes a desarrollar tanto sus habilidades matemáticas como las habilidades transferibles.

Usando la modelación en cursos existentes. Considere su curso de cálculo de primer semestre; el curso cubre una lista completa de temas que son enseñados a la par con objetivos de aprendizaje específicos y probablemente también incluye aplicaciones como velocidad, tasas relativas y optimización. De forma similar, el resto de la secuencia de cálculo y otros cursos de matemáticas requeridos para las carreras STEM también ya incluyen, probablemente, aplicaciones. Sin embargo, es importante recordar que las aplicaciones no son necesariamente problemas de modelación. Como fue ilustrado en el Capítulo 1, un problema de aplicación puede ser modificado para convertirse en un problema de modelación. Un problema de modelación es abierto, dándole a los estudiantes autonomía a lo largo del proceso de modelación a medida que definen el problema, hacen suposiciones, encuentran datos, desarrollan un modelo, ponen a prueba el modelo, analizan las soluciones, generan conclusiones y reportan sus resultados. Sin embargo, el nivel de autonomía puede ser restringido, de forma que los estudiantes sean capaces de experimentar muchos aspectos del proceso de modelación mientras aún abordan una habilidad matemática en particular. Por ejemplo, usted puede hacer que los estudiantes recolecten datos sobre la temperatura de una taza de café que se enfría a temperatura ambiente. Si les pide a los estudiantes que grafiquen sus datos en forma de cambio en la temperatura contra temperatura (es decir, temperatura, no tiempo en el eje horizontal), los estudiantes probablemente encontrarán que la derivada de la temperatura es aproximadamente una función lineal de la temperatura. Por lo tanto, practicarán resolver ecuaciones diferenciales mientras que se involucran con elementos del proceso de modelación.

Como acabamos de ver, usted puede introducir un problema de modelación que haga que los estudiantes empleen una habilidad recientemente adquirida. Alternativamente, un problema de modelación como el del café mencionado anteriormente, puede ser introducido al principio de la unidad con el propósito de motivar las lecciones de la unidad entera, reconsiderando el problema frecuentemente a medida que empiezan a construir el conjunto de herramientas necesarias para abordarlo.

Además, otro enfoque es usar la modelación para generar conexiones entre ideas de cursos diferentes, como una pregunta de modelación en un curso de cálculo cuya solución requiera razonamiento estadístico básico o un problema de modelación en un curso de cálculo integral, que también haga que los estudiantes piensen sobre tasas de cambio, recurriendo a sus experiencias previas en cálculo diferencial.

Aquí se presentan las ideas principales a tener en cuenta al comenzar a agregar modelación a sus cursos existentes:

- Aplicaciones que no son necesariamente modelación, ya que se necesita tener algo de autonomía y apertura.
- Incluso los problemas abiertos pueden ser presentados de tal forma que habilidades curriculares particulares puedan ser involucradas y evaluadas.
- La modelación puede ser usada para:
  - Motivar el uso de material nuevo;
  - Proporcionar práctica para material recientemente aprendido;
  - Conectar material diverso.

¿CÓMO HACEN MODELACIÓN MATEMÁTICA LOS ESTUDIANTES DE CARRERAS STEM?

Hay mucha flexibilidad en cómo incorporar la modelación en el currículo existente. Dependiendo de las metas de sus cursos de matemáticas STEM y la flexibilidad del programa, sus estudiantes pueden involucrarse en el proceso completo de modelación, o solo emplear algunos elementos de éste. Pueden tener muchas pequeñas preguntas de modelación a lo largo del semestre o pueden tener solo uno o dos proyectos mayores. Los estudiantes pueden trabajar en asilamiento, en grupos o con toda la clase. El trabajo con problemas de modelación puede ocurrir fuera del salón de clases o las ideas de modelación pueden convertirse en parte de las lecciones y discusiones diarias a medida que la clase considera cómo cada nueva idea enseñada impacta su modelo, su solución y la interpretación de sus resultados.

Sin importar las aproximaciones que use y el nivel en el cual los estudiantes se involucren con el proceso de modelación, es importante que los estudiantes tomen responsabilidad de sus experiencias de modelación al asegurar algo de autonomía en el proceso.

ROL DEL CUERPO DOCENTE

En la sección previa presentamos los siguientes roles del cuerpo docente: desarrollador del curso, desarrollador del problema, facilitador de clase y asesor (coach). A medida que agrega modelación a cursos existentes, usted tiene aún que considerar muchas de las mismas cuestiones, por lo que lo dirigimos a dicha sección para una explicación detallada de estos roles. A continuación, resaltamos algunas consideraciones que no son abordadas en esa sección.

Desarrollador del curso y del problema. Dado que las metas de su curso de matemáticas están muy probablemente relacionadas con el aprendizaje de contenido matemático, usted necesitará diseñar problemas de modelación que tengan suficiente información para que los estudiantes desarrollen con mayor probabilidad un tipo particular de modelo, de forma que usen el contenido matemático fijado como objetivo.

Así mismo, como desarrollador del curso, necesitará considerar cuánto tiempo desea dedicar a la enseñanza del proceso de modelación y las habilidades transferibles, como la comunicación escrita. Tendrá que tomar una decisión consciente acerca de si debe dedicar tiempo de la clase a estas metas secundarias, pero importantes, del curso. Aunque esto toma una parte importante del tiempo destinado a la discusión en clase del contenido matemático, invertir tiempo en la introducción al proceso de modelación y en prácticas de escritura y comunicación al principio del semestre puede incrementar la productividad de los estudiantes en el transcurso del semestre.

Asesor de instrucción (coach). Los estudiantes en carreras STEM encontrarán probablemente problemas de modelación en sus carreras y las habilidades que aprenden en una clase de modelación son importantes y útiles. Sin embargo, puede que usted encuentre aún más resistencia a la modelación matemática en estudiantes de carreras STEM que en los no pertenecientes a éstas, ya que muchos estudiantes STEM han prosperado en las aulas de matemáticas tradicionales, en las cuales simplemente han tenido que identificar problemas por tipo y aplicar un algoritmo. Los problemas de modelación empujan a los estudiantes a razonar, tomar decisiones y aceptar las consecuencias de éstas, incluyendo la posibilidad de fracaso y esto puede ser extremadamente incómodo para los estudiantes que se ven a sí mismos como buenos en matemáticas y que no han experimentado retos o fracasos en sus cursos de matemáticas previos. Es importante que se le diga abiertamente a este grupo de estudiantes que el proceso de modelación incluye frecuentemente la experiencia del fracaso, de modo que incluso los buenos modelos pueden ser mejorados, llevando a mejor entendimiento y respuestas para el problema del mundo real en cuestión. Desde el momento histórico cuando la retención de los estudiantes de las carreras STEM recibió la atención del Presidente Obama en los Estados Unidos es imperativo que aceptemos el papel de entrenador, dándole a nuestros estudiantes STEM la motivación que necesitan para aceptar estos retos y para que aprendan la alegría de superar el fracaso.

EVALUACIÓN

A diferencia de la evaluación en un curso de modelación matemática universitario, el centro de la evaluación en un curso de contenido específico, como cálculo, debe ser primariamente el contenido. Aunque aún desee evaluar el proceso de modelación y las habilidades transferibles, por ejemplo la comunicación, como se discutió en la sección previa, en un curso dirigido por el contenido también necesitará evaluar las habilidades de sus estudiantes en cuanto al contenido matemático, como la habilidad de diferenciar e integrar. Los proyectos de modelación matemática necesitan no ser tareas suplementarias que son añadidas a un curso que ya está lleno de tareas, pruebas y exámenes para calificar, sino que deben ser usados como herramientas significativas para ayudarnos, como instructores, a obtener una evaluación más completa del domino del material por parte de nuestros estudiantes. A lo largo de su desarrollo, uso e interpretación de modelos matemáticos y resultados, nuestros estudiantes muestran tanto la mecánica del material del curso, así como su nivel de entendimiento, el cual respalda el material. Esto nos brinda una rara oportunidad de evaluar la habilidad de los estudiantes para aplicar el contenido matemático de nuestros cursos a problemas del mundo real.

REPASANDO LOS PRINCIPIOS GUÍA Y LAS CONCLUSIONES

Mientras le damos cierre a esta sección, pensamos que sería de ayuda repasar los principios guía del Capítulo 1 y observarlos a través de la lente de la enseñanza de la modelación matemática a nivel universitario.

LA MODELACIÓN, TAL COMO LA VIDA MISMA, ES ABIERTA Y POCO CLARA

Como cuerpo docente que enseña a estudiantes universitarios, estamos a cargo de transformar gente joven en miembros de la sociedad que contribuyan y que estén preparados para enfrentar los retos abiertos y poco claros del mundo real.

CUANDO LOS ESTUDIANTES ESTÉN MODELANDO, DEBEN TOMAR DECISIONES GENUINAS

Dados los diversos intereses, bases de conocimiento y experiencias de vida que los universitarios llevan al salón de clase, nuestros grupos de estudiantes están listos para ofrecer conocimiento enriquecedor a los retos de modelación, siempre y cuando los apoyemos.

EMPIEZA EN GRANDE, EMPIEZA CON POCO, SIMPLEMENTE EMPIEZA

Si está desarrollando todo un curso de modelación, tal vez usted se pregunte cómo puede empezar con poco. Antes de invertir energía significativa en comenzar todo un curso nuevo, puede primero intentar una o más actividades de modelación en sus cursos existentes. Sin embargo, también puede simplemente entrar de lleno a la experiencia de modelación con sus estudiantes, aprendiendo juntos en el camino.

LA EVALUACIÓN DEBE ENFOCARSE EN EL PROCESO, NO EN EL PRODUCTO

A medida que evaluamos el trabajo de nuestros estudiantes, queremos asegurarnos de que nuestras metas para el curso y la métrica de evaluación que usemos estén alineadas la una con la otra. También tenemos que asegurarnos de comunicar claramente nuestras expectativas y cómo se relacionan con nuestras metas y evaluaciones, de forma que nuestros estudiantes estén listos para prosperar en este escenario de curso no tradicional.

LA MODELACIÓN NO OCURRE EN AISLAMIENTO

A medida que preparamos a nuestros estudiantes para entrar en la fuerza laboral o en la académica, también debemos prepararlos para trabajar bien en equipo. Adicionalmente, es importante que los estudiantes entiendan cómo aprovechar el trabajo de otros a través de la investigación y la referenciación, de modo que estén habilitados para hacer contribuciones significativas al mundo.

5. ¿QUÉ ES LA MODELACIÓN MATEMÁTICA? EL ARTE Y SU SABOR

INTRODUCCIÓN

Cuando el proyecto GAIMME empezó, le preguntamos al equipo de autores, compuesto por modeladores expertos, matemáticos y docentes de matemática, cuál era su opinión sobre qué es y qué no es la modelación. En esta sección, presentamos extractos de sus respuestas, con el objetivo de añadir un sabor mucho más suntuoso a nuestra descripción y para exponer cómo la modelación es vista por aquellos que la practican.

El Dr. Henry O. Pollack fue presidente de la Asociación Matemática de América (MAA) y subdirector de Investigación Matemática en Bell Labs y Bellcore. Sus comentarios, tomados de Historia de la Enseñanza de la Modelación, en *Historia de las Matemáticas Escolares,* Vol. 1, NCTM, 2003, se enfocan en la relación de las matemáticas con el mundo real:

> "Los matemáticos tienen el hábito de dividir el mundo en dos partes: la correspondiente a las matemáticas y todo lo demás, siendo esto último llamado a veces como el mundo real. La gente tiende con frecuencia a ver estas partes como independientes la una de la otra. Y nada podría estar más alejado de la realidad. Cuando usted usa matemáticas para entender una situación del mundo real, que muy probablemente lo hace para tomar acción o incluso para predecir el futuro, se toman en serio tanto las situaciones reales como las matemáticas resultantes. Estas situaciones y las preguntas asociadas a ellas pueden ser de cualquier envergadura, ya sea enormes o pequeñas. Las grandes pueden llevar a carreras de por vida y pueden establecerse departamentos universitarios completos para preparar gente en estas profesiones. En el otro lado de la escala, hay pequeñas situaciones y sus preguntas correspondientes que, a pesar de su tamaño, pueden ser de gran importancia para las personas involucradas. Por ejemplo: planear un viaje, planificar la preparación de la cena del Día de Acción de Gracias, contratar un nuevo asistente o hacer ofertas en una subasta.
>
> Ya sea que el problema sea grande o pequeño, el proceso de interacción entre las matemáticas y el mundo real es el mismo. La situación real usualmente tiene tantas facetas que usted no puede tomarlas todas en cuenta, así que decide cuáles son las más importantes y las mantiene. En este punto, usted tiene una versión idealizada de la situación del mundo real que puede traducir en términos matemáticos. ¿Qué tiene ahora? Un modelo matemático de la

pregunta idealizada. Entonces, usted aplica sus instintos y conocimientos matemáticos al modelo y gana conocimientos de interés, ejemplos, aproximaciones, teoremas y algoritmos. Traduce todo esto a la situación del mundo real, esperando tener una teoría para la pregunta idealizada. Pero tiene que volver a revisar. ¿Son los resultados prácticos, las respuestas razonables y las consecuencias aceptables? Si es así, ¡genial! Si no, considere de nuevo las decisiones que tomó en un principio y trate de nuevo. Este proceso entero se llama modelación matemática."

A lo largo de este documento, hemos tratado de enfatizar la distinción entre un modelo matemático y el proceso de modelación matemática. Como la Dra. Katie Fowler de la Universidad de Clarkson ha expresado tan elocuentemente:

> "Un modelo matemático es una herramienta que usa las matemáticas para representar una situación del mundo real para facilitar su cuantificación, análisis, creación de predicciones y para ganar entendimiento. El proceso de modelación matemática es la creación de dicha herramienta y frecuentemente requiere creatividad significativa y la realización de lluvias de ideas, pero no necesariamente matemáticas complicadas. El proceso en sí mismo incluye determinar cuál es el resultado del modelo, es decir, qué está siendo cuantificado e identificar qué variables pueden impactar esta cantidad. Las suposiciones deben ser hechas para determinar la relación entre la información de entrada y el resultado del modelo. Finalmente, puede haber modelos matemáticos múltiples para cualquier escenario, con niveles variados de complejidad. El modelo en sí mismo depende de los recursos disponibles y el conocimiento de la persona que lo crea. El proceso de modelación incluye validar el modelo para evaluar qué tan bien se desempeña haciendo predicciones o medidas y, a través de esto, considerar su perfeccionamiento."

Una forma de reflexionar sobre los pasos del proceso de modelación y por qué son importantes es provista por la Dra. Rachel Levy del Harvey Mudd College:

> "La modelación matemática efectiva:
>
> - Usa herramientas matemáticas (definidas de forma amplia) y escoge la metodología que se adapte al problema.
> - Le da sentido a algo en el mundo (responde preguntas, descubre/explica un fenómeno subyacente, hace predicciones/conexiones).
> - Envuelve repetición o iteración para crear y mejorar el modelo según sea necesario, basándose en la evidencia disponible.
> - Equilibra la viabilidad y la simplicidad con la optimización, al hacer aproximaciones útiles.
> - Comunica el modelo y/o los resultados efectivamente para el cliente o la audiencia."

El Dr. Joseph Malkevitch del York College (CUNY), afirma:

> "La modelación matemática es la rama de las matemáticas que trata del uso de las matemáticas para obtener entendimiento en campos y situaciones fuera de las matemáticas... Una enorme ventaja del uso de un marco de trabajo de modelación matemática a lo largo de las matemáticas preuniversitarias es que proporciona una rúbrica para mostrar a los alumnos una perspectiva de las matemáticas que incorpora muchas otras ideas atractivas desde el punto de

vista de la sociedad y de la comunidad matemática sin hacer de la fobia a las matemáticas un resultado tan común de su enseñanza en este nivel."

MODELACIÓN VS MODELO

El Dr. Frank Giordano, en el libro *A First Course in Modeling ("*Un primer curso de modelación matemática"*)*, primera edición, Giordano y Weir, Brooks Cole, 1985, apunta:

> "Así que, ¿qué es modelación? Primero, es un proceso para conectar sistemas del mundo real, como comportamientos o fenómenos observados, con el mundo matemático, como por ejemplo, modelos, operaciones matemáticas, reglas y conclusiones matemáticas. Un sistema es un conjunto de objetos unidos en una interacción regular o en interdependencia. El modelador está interesado en entender cómo funciona un sistema en particular, cuál es la causa de un cambio en el sistema y la sensibilidad del sistema a ciertas modificaciones. Con frecuencia, el modelador está interesado en predecir qué cambios pueden ocurrir y cuándo. En el centro del proceso se encuentra la construcción o selección de un modelo.
>
> Entonces, ¿qué es un modelo? Un modelo matemático es un constructo diseñado para estudiar un sistema o fenómeno particular del mundo real. El constructo puede ser gráfico, simbólico, una simulación o un constructo experimental. Una vez que se tiene un fenómeno de interés, podemos escoger una representación matemática o podemos elegir replicar el comportamiento."

Dan Teague, de la Escuela de Ciencia y Matemáticas del Estado de Carolina del Norte (NCSSM) describe el mundo a través de una lente matemática:

> "Un modelo matemático es una caricatura matemática de algún proceso o fenómeno de importancia e interés en nuestras vidas. Esta caricatura es dibujada con conceptos matemáticos y simbolismos, en lugar de carboncillos y acuarelas y, como todas las caricaturas, enfatiza algunos aspectos del fenómeno real y disminuye o ignora otros. El método de ignorancia intencional en el cual algunos detalles del fenómeno real son omitidos o se asume que se comportan adecuadamente nos permite mantener una representación simple y ordenada. Los modeladores se esfuerzan por usar la ignorancia temporal efectivamente, con algunos componentes que de inicio se omiten para después ser añadidos de nuevo una vez que el modelo empieza a tomar forma.
>
> Durante la primera ronda, los modeladores crean una representación matemática que captura la forma más simple de su problema, reteniendo la esencia de éste. Investigan y examinan la representación con herramientas matemáticas hasta que se da lugar a algo de entendimiento o conocimiento sobre el fenómeno que está siendo investigado que no era evidente antes de que el problema fuera creado.
>
> A través de la simplificación, los modeladores esperan capturar algunos aspectos importantes o estructuras del fenómeno en forma matemática, y, al aplicar las reglas estándar de las matemáticas de forma creativa, se espera observar el proceso o fenómeno desde una nueva perspectiva desde la cual el entendimiento y conocimiento necesario puede ser logrado. Este nuevo entendimiento o conocimiento les da a los modeladores un nuevo punto de partida para la siguiente iteración del modelo, en la cual algunas suposiciones

> pueden relajarse y el modelo captura más del fenómeno y se convierte menos en una caricatura y más en un retrato."

Karen Bliss del Instituto Militar de Virginia (VMI) describe varios fenómenos con matemáticas:

> "Yo veo la modelación matemática como una respuesta a una pregunta o al deseo que lleva a la descripción de un fenómeno. Tal vez, uno quiere saber la mejor forma de diseñar algo. O quizás, uno ha encontrado algunos datos y le gustaría poder explicarlos o, incluso, hacer una predicción acerca de los valores futuros.
>
> Una vez que la pregunta es planteada, esperamos cuantificar aspectos del fenómeno. Quizás consideremos las leyes de la física o tomemos en cuenta nuestro conocimiento sobre otra disciplina. Por ejemplo, con el objetivo de cuantificar una tasa de transmisión, podemos reflexionar sobre cómo una enfermedad se dispersa, de forma precisa, en personas infectadas poniéndose en contacto con personas susceptibles.
>
> Finalmente, nuestro modelo matemático es una ecuación o ecuaciones que creemos que describen el fenómeno. En este punto, nos hemos movido del fenómeno físico al terreno de las matemáticas, y podemos usar la riqueza de herramientas que las matemáticas proporcionan para ayudarnos a encontrar una solución para el problema matemático en cuestión.
>
> Nota: el término solución no está bien definido en este contexto, dado que el tipo de solución depende de qué pregunta estamos planteando; puede que sea un número, puede ser una función, puede ser un vector de números que representa el valor de una cantidad en los siguientes 10 años, puede ser una estadística, etc.
>
> La solución que encontremos es una solución al problema matemático. Tenemos que considerar si esa solución matemática tiene sentido en el contexto del fenómeno físico. ¿Se ajusta a los datos? ¿Podemos confiar en que explicará el fenómeno? ¿Capturamos las características importantes del fenómeno físico o desestimamos algo?"

Es así como la modelación es un proceso que nos habla acerca del mundo, como la Dra. Rose Mary Zbiek de la Universidad Estatal de Pennsylvania enfatiza:

> "La modelación matemática es un proceso empírico o teórico que produce una o más entidades matemáticas que, con sus propiedades, captura aspectos clave y relaciones entre estos dentro de una situación real o imaginaria, un proceso que, idealmente, es realizado por el modelador en servicio de resolver un problema o conseguir entendimiento relacionado a la situación."

Cuando modelamos el mundo real, siempre estamos haciendo una aproximación de la realidad y al final, obtenemos una respuesta aproximada. Ésta es la diferencia entre ser definitivo y ser defendible. Aunque raramente habrá una forma o una respuesta correcta, debemos ser capaces de defender las decisiones que tomamos en términos de lo que entendemos sobre una situación del mundo real y a través de lo que podemos hacer matemáticamente. Pero la modelación es frecuentemente un toma y daca, como Landy Godbold de las Escuelas de Westminster apunta:

> "A lo largo del proceso de modelación, una meta primaria es usar la información proveniente desde un punto de vista para guiar el trabajo hacia uno nuevo. La modelación empieza típicamente en el mundo contextual, con el modelador tomando decisiones con relación a qué características de la situación son consideradas como esenciales y cuáles pueden ser simplificadas o ignoradas inicialmente con el objetivo de construir una representación matemática manejable pero significativa. Ser capaz de jugar a "qué pasaría si" al variar parámetros con un constructo matemático, puede reemplazar una gran parte de la experimentación física, por ejemplo. La modelación puede llevar al modelador desde el concepto de "La Respuesta" a un mundo de respuestas."

Construir modelos requiere creatividad, comprensión de las matemáticas y los contextos y la habilidad artística de aceptar o acoger representaciones que son necesariamente incorrectas en algunos aspectos para poder ganar entendimiento. La modelación implica la simplificación. Qué aspectos de una situación simplificar y cuáles tratar de representar de forma más exacta son decisiones que pueden variar, y éstas dependen del entendimiento del contexto, los objetivos, el modelo y las herramientas matemáticas disponibles para el modelador y, tal vez, para un consumidor del modelo.

> "Los alumnos se enteran del uso de modelos todos los días. Los modelos predicen las rutas de las tormentas y el curso de enfermedades como el ébola. También ayudan a dar forma al panorama político. Desde un punto de vista educativo, hacer modelación provee una posibilidad para que los alumnos puedan moverse de tocar escalas a hacer música, por tomar prestada una idea expresada por Dan Teague hace muchos años."

Dado que la modelación matemática es un proceso, es importante distinguirlo de las aplicaciones matemáticas. Como Pollack ha escrito:

> "Cada aplicación matemática usa las matemáticas para entender, evaluar o predecir algo en la parte del mundo que se encuentra fuera de las matemáticas. Lo que distingue la modelación de otras aplicaciones matemáticas es: (1) atención explícita al comienzo del proceso, en donde se parte desde el problema que se encuentra fuera de las matemáticas para culminar en su formulación matemática y (2) una reconciliación explícita entre las matemáticas y la situación del mundo real, al finalizar. A lo largo del proceso de modelación, se le da consideración tanto al mundo externo como a las matemáticas y los resultados tienen que ser tanto matemáticamente correctos como razonables en el contexto del mundo real."

En la mayoría de los escenarios educativos, las aplicaciones son introducidas al final de los capítulos que enseñan procedimientos específicos. Los alumnos están bien conscientes de que deben usar estos procedimientos para resolver el problema de aplicación dado. Pero en un problema típico de modelación matemática, el problema no anuncia qué tipo de matemática se debe usar para analizarlo o resolverlo. De hecho, dado que los problemas vienen del mundo real, no es inmediatamente claro que las matemáticas pueden ser de ayuda en lo absoluto. Este asunto de cómo empezar a trabajar en un problema de modelación, es decir, dónde empezar, es el que hace de la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática algo muy desafiante pero también, algo sumamente gratificante. Dedicamos este reporte a promover este esfuerzo.

APÉNDICE A: RECURSOS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN

En esta sección, se proporcionan problemas ejemplificativos de diferentes fuentes con un triple propósito. Primero, informar al lector sobre los tipos de problemas de modelación disponibles en recursos comunes; segundo, ayudar al lector a identificar exactamente cómo el proceso de modelación matemática es abordado en estos problemas ejemplificativos; y tercero, ayudar al lector a identificar formas bajo las cuales algunas tareas de modelación matemática pueden ser modificadas para enfatizar diferentes partes del proceso de modelación que las tareas proporcionadas pueden no estar abordando.

EXÁMENES A NIVEL ESTATAL

Hay dos consorcios principales encargados de desarrollar evaluaciones alineadas con los CCSSM (Common Core State Standards for Math; *Estándares Estatales Comunes de Matemáticas*), la PARCC (Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers; *Asociación para la Evaluación de la Preparación para la Universidad y Carreras*) y el Smarter Balanced Assessment Constortium (*Consorcio de Evaluación de Smarter Balanced*), o simplemente Smarter Balanced. Como tal, es razonable observar estos exámenes y darse cuenta de cómo la modelación es evaluada dentro de ellos, con el objetivo de ganar entendimiento sobre las expectativas en cuanto a las competencias de modelación. Sin embargo, debe señalarse que la evaluación de la modelación se encuentra en sus primeras etapas. Esto significa que hay varios niveles de éxito en relación con la capacidad de asegurar que las competencias de modelación estén siendo realmente evaluadas.

Al momento de la realización de este texto, la PARCC ha publicado unos cuantos ejemplos de los tipos de problemas de modelación que los estudiantes encontrarán. Dentro de una cuestión de modelación típica de PARCC, el problema está especificado, lo cual no permite al estudiante demostrar su habilidad para identificar el problema a resolver. Más aún, las suposiciones raramente necesitan ser formuladas y, por ende, el estudiante puede completar fácilmente el problema sin reconocer este hecho. Así mismo, las variables importantes son dadas por lo general de forma explícita. También, el análisis del modelo, la evaluación y la repetición se encuentran, en gran parte, ausentes. Sin embargo, es común que los estudiantes reporten sus resultados, incluyendo alguna explicación de su metodología de resolución.

PROBLEMA EJEMPLIFICATIVO DE PARCC: ARREGLO RECTANGULAR DEL MAESTRO DE ARTE

Los ítems de modelación publicados por PARCC muestran una preferencia hacia la gradación para ayudar a los alumnos a avanzar en cada tarea. El ítem de modelación de tercer grado, *El Arreglo Rectangular del Maestro de Arte*, consiste en tres preguntas. El objetivo general de este ítem de modelación no se explica ni se deja para que el alumno lo identifique desde el principio del problema. Éste es introducido con una simple explicación: “Un maestro de arte colocará azulejos pintados por los alumnos de tres clases de arte en una sección de la pared.” El número de azulejos de cada clase es proporcionado.

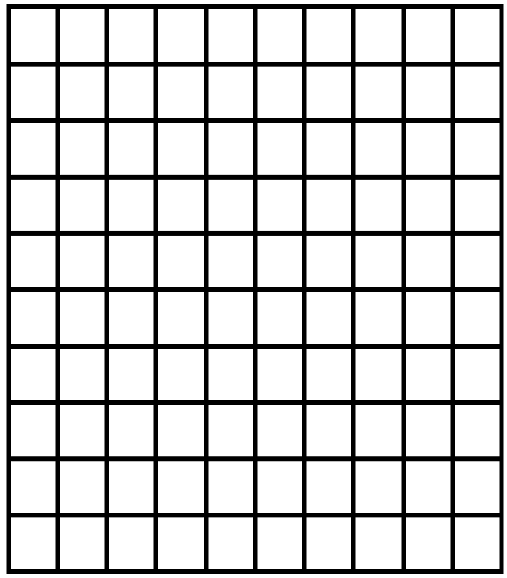
Parte A. El alumno debe determinar cuántos azulejos en total tiene el maestro de arte para colocar en esa sección de la pared. En este paso, las variables esenciales son definidas, aunque no por el estudiante sino por quien escribió la tarea. La variable en cuestión es el número total de azulejos.

Parte B. Una cuadrícula de 10 x 10 es proporcionada (ver el Problema A.1). Se le menciona al alumno que se debe hacer un arreglo rectangular con los azulejos y que cada cuadrado de la cuadrícula debe representar un solo azulejo. Aquí, de nueva cuenta, el alumno define variables, específicamente cuántos azulejos pueden ser colocados y cuántos es razonable colocar en un espacio determinado, así como de qué forma deben ser dispuestos. Se le instruye al alumno que sombreé los cuadrados de la cuadrícula para mostrar cómo un arreglo rectangular puede ser hecho a partir de todos los azulejos. Note que un alumno puede llegar a la solución a través de prueba y error, a pesar de que el objetivo de la evaluación sea que el alumno haga uso de la relación entre la multiplicación y los arreglos rectangulares.

Parte C. En este segmento se deja saber al alumno que otro arreglo rectangular es creado usando 56 azulejos, con 7 azulejos por fila y que se usa una ecuación de multiplicación que utiliza la letra R para representar el número de filas. Se le indica al alumno que escriba esa ecuación con la variable R. Esta parte requiere que el estudiante extienda el modelo creado en la Parte B a un modelo y una solución más matematizados que los creados en la parte B. En el ejemplo para tercer grado, se involucran algunos pasos de la modelación matemática, por ejemplo hacer los cálculos y repetir. Pero se está lejos de aplicar todos los pasos. Este problema puede ser adaptado para el salón de clases, por ejemplo, al permitir que los alumnos determinen las restricciones de la situación por sí mismos. El docente puede dirigir una discusión sobre cómo sería mejor arreglar los azulejos o incluso podría indicar una preferencia hacia un arreglo rectangular. Una vez que se haya acordado de cualquier forma un arreglo rectangular, el docente puede pedir a los alumnos que lo hagan. Muchos tipos de configuraciones pueden ser presentadas. Entonces, se les puede pedir a los alumnos que implementen el modelo en una pared del salón de clases. Es posible que encuentren que algunos arreglos de azulejos no encajan. Esto los llevará a descubrir que el espacio disponible también importa, así como saber si la superposición de azulejos está permitida o si se debe considerar espaciamiento entre los azulejos. Una vez que los alumnos hayan tomado en cuenta estas restricciones, pueden generalizar el modelo.

La cuadrícula muestra cuánto espacio puede usar el maestro de artes. Usa la cuadrícula para crear un arreglo rectangular que muestre cómo el maestro puede colocar los azulejos en la pared.

Selecciona los cuadrados a sombrear. Cada azulejo debe ser denotado por un cuadrado sombreado.



PROBLEMA A.1: ÍTEM DE MODELACIÓN PARCC DE 3° GRADO, EL ARREGLO RECTANGULAR DEL MAESTRO DE ARTE, PARTE B.

PROBLEMA EJEMPLIFICATIVO PARCC: CAMBIOS DE TEMPERATURA

Un ítem de modelación PARCC de Álgebra II/Matemáticas III contiene evidencias para la evaluación de algunas partes del proceso de modelación matemática que no están presentes en muchos otros elementos evaluativos, particularmente el generar suposiciones, definir variables esenciales y analizar el modelo. En el problema *Cambios de Temperatura* (ver el Problema A.2), se plantea un escenario en donde un científico estudia patrones de enfriamiento a medida que una substancia se enfría de 200°C a 0°C. Se presenta un plano con la temperatura de cierta substancia a 0, 40, 80 y 120 segundos dentro del experimento. Posteriormente, se grafica tiempo contra temperatura dando lugar a tres posibles modelos: las curvas A, B y C, que son ajustadas dentro de la gráfica.

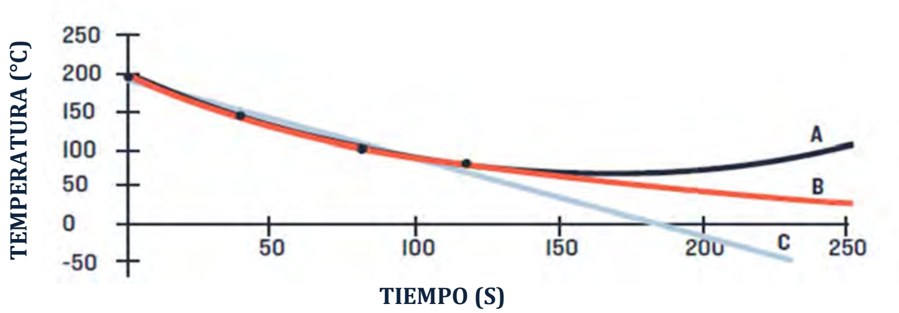
Parte A. El estudiante debe emparejar el tipo de modelo con las curvas, sea lineal, cuadrático o exponencial, e identificar el mejor modelo para el enfriamiento de la substancia durante el período de 0 a 250 segundos. Después, debe explicar por qué los demás modelos no se ajustan a los datos. Esto requiere que las suposiciones sean hechas y específicamente que la tendencia vista en los cuatro puntos dados sea continua. Al escoger el mejor tipo de modelo, el estudiante debe determinar las variables esenciales en este escenario, específicamente que la temperatura no debe incrementar, eliminando así el modelo cuadrático, y que la temperatura, por diseño, no debe caer por debajo de 0°C. Por ende, el modelo lineal se elimina. Este ítem requiere también que el estudiante evalúe los modelos presentados para determinar cuál es mejor y que explique su evaluación.

Parte B. Se da al estudiante la tarea de construir una ecuación para el modelo específico. Ésta es la asignación usual en matemáticas. Debe ser señalado que, con la intención de completar esta parte del problema, el estudiante debe hacer uso de la estimación, dado que la base de la función exponencial no es la misma para cada cambio sucesivo de temperatura. Las bases son cercanas la una de la otra, por lo que, al usar este modelo, el estudiante debe aceptar que el modelo no representará perfectamente el enfriamiento de la sustancia con el objetivo de completar el problema de forma exitosa. Si se usa en un salón de clases, sería razonable discutir explícitamente las suposiciones que se usan para resolver el problema.

Una científica está estudiando los patrones de enfriamiento de un material particular a través del tiempo. Su investigación requiere calentar una muestra del material a 200°C. Ella registra la temperatura de la muestra mientras se enfría hasta llegar a los 0°C. La tabla muestra los datos recolectados durante los primeros 2 minutos del proceso de enfriamiento.

TIEMPO DE ENFRIAMIENTO DEL MATERIAL (SEGUNDOS)	0	40	80	120
TEMPERATURA (°C)	200	141	101	74

La figura muestra los datos de la científica (los puntos correspondientes a sus mediciones se encuentran representados por los puntos grandes en la gráfica). También se muestran tres modelos posibles para los datos: un modelo lineal, un modelo cuadrático y un modelo exponencial



¿Cuál modelo es lineal?, ¿Cuál es cuadrático?, ¿Cuál es exponencial?

¿Qué modelo es mejor para los rangos de tiempo 0 < t < 250?

Explica por qué los otros modelos no se ajustan tan bien a los datos para el rango de tiempo 0 < t < 250.

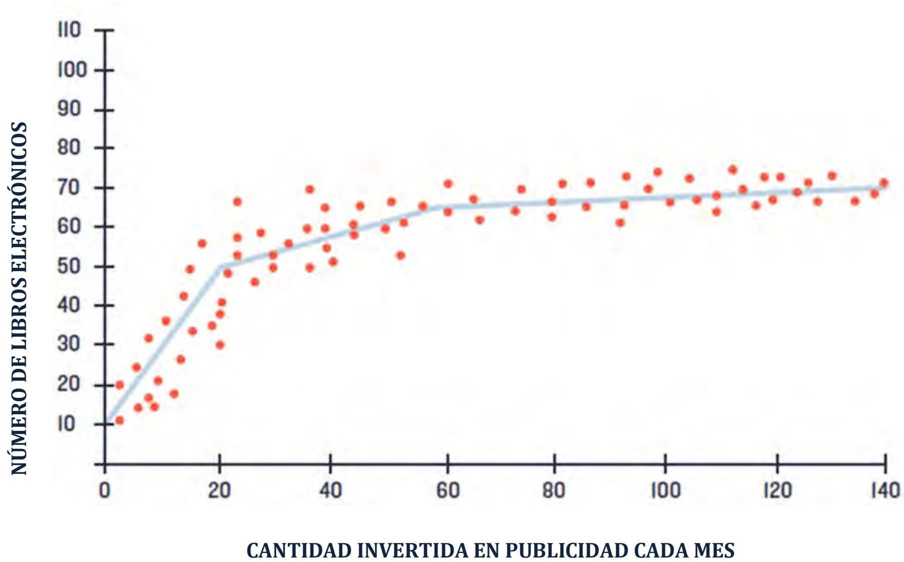
PROBLEMA A.2: ÍTEM DE MODELACIÓN PARCC DE ÁLGEBRA II/MATEMÁTICAS III, CAMBIOS DE TEMPERATURA

PROBLEMA EJEMPLIFICATIVO DE LA PRUEBA DE EVALUACIÓN *SMARTER BALANCED*: PUBLICIDAD DE UN LIBRO ELECTRÓNICO

La prueba *Smarter Balanced* presenta ítems tanto de modelación matemática como de resolución de problemas. De los ítems publicados, hay muchos más ejemplos de resolución de problemas que de modelación. Sin embargo, los ítems de modelación que han sido divulgados tienden a la introducción de un problema significativo sin escalonar la tarea para el estudiante. No obstante, debe señalarse que esta observación está basada en solamente dos ejemplos de problemas de modelación, ambos dirigidos al nivel de educación media superior.

Uno de los dos problemas de modelación publicados gira en torno a las ventas de libros electrónicos. Se le presenta al estudiante una gráfica de dispersión que está seccionada en tres partes, cada una con su propia línea de mejor ajuste (ver el Problema A.3). Estas tres líneas están conectadas. La gráfica muestra la relación entre la cantidad de dinero que alguien llamado Mariana gasta en publicidad y cuántos libros electrónicos se venden gracias a esto.

Mariana gana USD 3 por cada libro electrónico que vende en su sitio web. Los libros electrónicos son libros disponibles de forma digital. Ella investigó la relación entre las cantidades invertidas en publicidad cada mes y el número de libros electrónicos vendidos y usó esta información para determinar la línea de mejor ajuste mostrada en esta gráfica.



¿Cuál es la cantidad máxima que Mariana debe gastar en publicidad cada mes? Muestra tu trabajo o explica cómo encontraste tu respuesta.

PROBLEMA A.3: ÍTEM DE SMATER BALANCED 43028 SOBRE PUBLICIDAD DE LIBRO ELECTRÓNICO

La introducción a este escenario explica que Mariana gana USD 3 por cada libro vendido. El estudiante debe determinar cuánto dinero debe gastar Mariana en publicidad cada mes. Este elemento requiere que el estudiante identifique el problema a ser resuelto, que haga suposiciones para usar el modelo y encontrar una solución y que reporte sus resultados. Con el objetivo de responder la pregunta, el estudiante tendrá que identificar primero, de forma precisa, el problema a ser resuelto. Con algunos cálculos, el estudiante debe determinar que para $0 \leq x \leq 20$, Mariana gana USD 6 por cada dólar invertido en publicidad, que para $20 \leq x \leq 60$ gana USD 1.13 por cada dólar invertido y que para $x \geq 60$ Mariana solo gana USD 0.94 por dólar, donde x es la cantidad de dinero gastada en USD. Esto significa que algún estudiante puede entender que el problema es la maximización de las ganancias, mientras que otro puede interpretarlo como generar una ganancia decente mientras se mantiene un nivel de seguridad en la inversión debido a la variabilidad de las ganancias reales. Al resolver este problema, el estudiante debe hacer también algunas suposiciones implícitas. Por ejemplo, que las tendencias mostradas continuarán y que Mariana tiene suficiente dinero para invertir en publicidad. Una vez que el problema ha sido identificado y las suposiciones hechas, el estudiante debe usar este modelo para llegar a una solución que satisfaga estas decisiones. Al llegar a la solución, el estudiante debe reportar el proceso usado para alcanzar tal conclusión. Este problema es un problema de modelación bastante completo y probablemente no necesita mucha adaptación para ser usado en el salón de clases.

PRUEBAS INTERNACIONALES COMPARATIVAS

PISA y TIMSS son pruebas internacionales comparativas que incluyen una amplia variedad de actividades de resolución de problemas dentro de sus secciones de matemáticas. Cuando es posible, los ejercicios de resolución de problemas están establecidos en un escenario del mundo real, y por ende, tienen el potencial de ser buenos candidatos para su inclusión en escenarios de modelación matemática.

PROBLEMA EJEMPLIFICATIVO DE PISA: NAVEGANDO BARCOS

Una pregunta de la prueba PISA 2012 incluye un escenario de modelación matemática interesante. En esta pregunta de la serie titulada *Navegando Barcos* (ver el problema A.4), se le pide al estudiante que determine cuánto tiempo tomaría para que una inversión "verde" en una cometa de tracción que reduce el uso de diésel cubra el costo de su compra a través del ahorro de combustible. Toda la información relevante es dada, incluyendo el consumo anual promedio de diésel y el costo de la cometa de tracción. También se incluyen cantidades distractoras, como el largo y el ancho del barco, su capacidad de carga y su velocidad máxima. Por lo tanto, el estudiante debe escoger las variables más importantes de una lista de variables potenciales y de cantidades distractoras. En la pregunta, el problema a ser resuelto es bastante claro: determinar el valor del ahorro en combustible anual y cuantos años tomará para que esos ahorros sumen un valor más grande que el costo de la cometa. Se deben hacer suposiciones, pero, como ocurre frecuentemente en estos problemas, el estudiante puede no estar consciente de que dichas suposiciones son necesarias para proceder. Por ejemplo, uno puede asumir un precio constante de diésel. Ésta no es una suposición particularmente razonable, especialmente porque el cometa se pagará por sí mismo solo después de unos 8.5 años bajo este supuesto. Es muy probable que el costo del combustible incremente a lo largo de este periodo de tiempo. Sin embargo, esta hipótesis llevará a una estimación y si hay disposición, a un modelo refinado que tome en cuenta el incremento en el precio del combustible. Más aún, se debe asumir que el ahorro en combustible será constante, que el cometa no necesitará servicio a ningún costo y que el cometa será funcional por la cantidad de tiempo en el que esté instalado para reducir el consumo de combustible. Un estudiante podría, ciertamente, resolver el problema solo con la información provista sin reconocer que estas suposiciones deben ser hechas. Si este problema fuera usado en el salón de clases, sería beneficioso que se establecieran estas suposiciones con claridad y, tal vez, que se repita el proceso para refinar el modelo inicial, con el objetivo de llegar a un modelo mejor y más predictivo.

Debido al alto costo del diésel de 0.42 zeds* por litro, los propietarios del New Wave están pensando equipar su barco con una cometa de tracción.

Se estima que una cometa de tracción como ésta tiene el potencial de reducir el consumo de diésel alrededor de un 20%.

NOMBRE	**New Wave**
TIPO	**Buque de carga**
LARGO	**117 metros**
ANCHO	**18 metros**
CAPACIDAD DE CARGA	**12,000 toneladas**
VELOCIDAD MÁXIMA	**19 nudos**
CONSUMO DE DIÉSEL POR AÑO SIN COMETA DE TRACCIÓN	**Aproximadamente 3,500,00 litros**

El costo de equipar el New Wave con una cometa de tracción es de 2,500,000 zeds.

¿Después de cuántos años el ahorro en combustible diésel cubrirá el costo de la cometa de tracción? Proporciona cálculos para justificar tu respuesta.

***** El zed es una unidad de moneda común inventada para las pruebas

PROBLEMA A.4: ÍTEM PISA 2012, NAVEGANDO BARCOS, PREGUNTA 4.

PROBLEMA EJEMPLIFICATIVO DE PISA: ESCALANDO EL MONTE FUJI

Otra pregunta de PISA 2012, de la serie titulada *Escalando el Monte Fuji*, incluye también aspectos del proceso de modelación matemática que pueden ser útiles en el salón de clase (ver el Problema A.5). En la pregunta, se le explica al estudiante que hay un sendero en el Monte Fuji de 9 km de largo hasta la cima. Se le da al estudiante la distancia del sendero, contemplado un viaje de ida y vuelta; la velocidad en la que Toshi, un excursionista, estima que le puede tomar caminar el sendero hasta la cima; el estimado de Toshi de la velocidad que le tomará descender por el camino; la hora en la que cierra el sendero y el hecho de que estas velocidades toman en cuenta descansos. Se le pide al estudiante que determine qué tan tarde Toshi puede comenzar a ascender por el sendero, considerando que debe de regresar a las 8 pm, la hora del cierre. Este problema, como se presenta, no requiere que el estudiante participe en varios de los procesos de la modelación matemática, a excepción de realizar los cálculos y formular un modelo previamente aprendido. Sin embargo, puede ser modificado fácilmente a un problema de modelación para ser usado en el salón de clases. Su fortaleza como buen candidato para un problema de modelación para el salón de clases es la pregunta del mundo real, ¿qué tan tarde puede Toshi empezar a caminar para estar de regreso a las 8 pm? Éste es un tipo de pregunta con la que la mayoría de la gente debe lidiar en sus vidas diarias. Un problema similar es, por ejemplo, el siguiente: *¿a qué hora debo salir a tomar el transporte público para llegar a mi destino a tiempo para mi cita?* Plantear el problema de esta forma es lo que distingue éste como uno más acorde para la modelación matemática, en lugar de simplemente pedir a los estudiantes que calculen el tiempo total de la travesía, por ejemplo, cuánto tomaría un viaje de ida y vuelta. Explicado de esta forma, el problema tiene un propósito de la vida real además de simplemente emplear una fórmula conocida. Esta pregunta puede ser adaptada al pedir a los estudiantes que identifiquen, e incluso estimen, las variables relevantes y que hagan suposiciones sobre hacer una caminata por su cuenta. Una parte importante de este problema es reconocer que la velocidad para ascender una montaña será usualmente menor que la velocidad de descenso. Dado que el Monte Fuji es un destino turístico, los estudiantes pueden querer tomar en cuenta el tiempo que un turista toma deteniéndose para tomar fotos. Retener los números y las suposiciones de este problema ayudará a convertirlo en un problema de modelación muy realista. Otra modificación puede ser proporcionar a los estudiantes un conjunto de tres senderos diferentes que los excursionistas pueden usar para regresar. Estos pueden ser de longitudes distintas, siendo algunos más sinuosos que otros, y la dificultad del sendero puede implicar diferentes velocidades promedio para el descenso. ¿Cuál de los tres senderos de regreso debe tomar el excursionista para regresar a casa lo más pronto posible?

El sendero Gotemba para ascender el Monte Fuji es de aproximadamente 9 kilómetros (km) de largo.

Los excursionistas necesitan regresar de la caminata de 18 km a las 8 pm.

Toshi estima que puede ascender la montaña a un promedio de 1.5 km por hora y descender al doble de la velocidad. Estas velocidades toman en cuenta recesos de comida y descanso.

Usando las velocidades estimadas de Toshi, ¿Qué tan tarde puede Toshi empezar su caminata para estar de regreso a las 8 pm?

PROBLEMA A.5: ÍTEM PISA 2012, ESCALANDO EL MONTE FUJI, PREGUNTA 2.

PROBLEMA EJEMPLIFICATIVO DE TIMSS: RECETA PARA TRES PERSONAS

Una pregunta de cuarto grado de TIMSS proporciona un escenario realista y una pregunta que no es de modelación. En esta pregunta, se le proporciona al alumno una lista de 3 ingredientes, como huevos, harina y azúcar, con las cantidades necesarias para una receta en particular (ver el Problema A.6). Se le dice al alumno que la receta rinde 6 porciones. El alumno debe determinar cuánta harina y azúcar se necesitan para una receta que rinda 3 porciones. Se les proporciona el número de huevos.

Este problema, como se presenta, no es un problema de modelación sólido. El alumno debe reconocer que reducir el número de porciones requiere un cambio proporcional y, tal vez, deba suponer que cada uno de los ingredientes requiere el mismo cambio proporcional. Sin embargo, se les presenta ya una solución: los 4 huevos requeridos en una receta para 6 se reducen a 2 en una receta para 3 personas. En este sentido, los alumnos pueden necesitar encontrar solamente un patrón en el cambio del número de porciones y el número de huevos, para después emplear este resultado para la harina y el azúcar. Aunque es un ejercicio valioso, no es una modelación. Una vez más, este problema puede ser adaptado para abordar más aspectos del proceso de modelación. En un escenario en el salón de clases, se puede presentar a los alumnos una receta para 6 personas y pedirles que determinen cómo usar la receta para un número variado y distinto de personas, por ejemplo, 12, 24, 3 y 2. De hecho, proporcionar una receta para que los alumnos cocinen, digamos pelotas saltarinas caseras[1], puede permitir que los alumnos identifiquen el problema en cuestión: tenemos una receta para tantas personas, pero tenemos más o menos personas que lo que la receta indica. Permitir a los alumnos trabajar con la receta les ayudará a hacer una suposición importante, específicamente que todos deben tener una porción del mismo tamaño.

Una presentación de la receta para grupos de diferentes tamaños permitirá que los alumnos hagan los cálculos tanto físicamente como de forma abstracta, en el papel. En este punto, los alumnos serán capaces de analizar la solución y su modelo. Si necesita ser refinado por alguna razón, se puede hacer en este instante. Finalmente, los alumnos reportarán sus resultados, tal vez incluyendo la preparación de la receta para todos los alumnos de grados inferiores.

Los ingredientes a continuación son usados para preparar una receta para 6 personas. Sam quiere hacer esta receta para solo 3 personas. Completa la tabla a continuación para mostrar qué es lo que Sam necesita para hacer esta receta para tres personas. El número de huevos que necesita es presentado.

HUEVOS	4 TAZAS
HARINA	8 TAZAS
AZÚCAR	½ TAZA

HUEVOS	2
HARINA	_____TAZAS
AZÚCAR	_____TAZA

PROBLEMA A.6: ÍTEM TIMSS 2011 PARA CUARTO GRADO M031183, RECETA PARA TRES PERSONAS

PROBLEMA EJEMPLIFICATIVO DE TIMSS: COSTO EN ZEDS DE UN VIAJE EN TAXI DE N KM

Esta pregunta para octavo grado de TIMSS, como la pregunta de cuarto grado presentada anteriormente, no es planteada como un problema de modelación matemática, pero el contexto de este problema es tomado de la vida real y, por ende, este puede ser modificado a un problema de modelación para el salón de clases. Este problema es de opción múltiple y requiere que los estudiantes identifiquen la expresión algebraica correcta para determinar el costo de un viaje en taxi de n kilómetros con una tarifa base de 25 zeds y una tasa estándar de 0.2 zeds por kilómetro recorrido (ver el Problema A.7). Como se muestra, el estudiante simplemente debe escoger el modelo correcto o fórmula de las cuatro opciones proporcionadas. Sin embargo, estos modelos no toman en cuenta varios cargos adicionales y propinas, los cuales pueden ser reconocidos por los estudiantes como costos añadidos de un viaje en taxi. La tarifa tomada con medidor en la ciudad de Nueva York, por ejemplo, tiene diferentes cargos adicionales dependiendo de la hora del día, el destino final del viaje, las condiciones del tráfico y el peaje, si éste se encuentra, así como una propina esperada de entre 20 % y 30 % (ver la Figura A.1). Claramente, para los taxis de la ciudad de Nueva York, un modelo simple usando la tarifa base de USD 2.5 y USD 0.5 por 1/5 de milla no será suficiente para determinar el costo real del viaje. Sin embargo, sería un punto de partida excelente para tomar en cuenta todos los cargos adicionales.

Por lo tanto, el problema puede ser introducido a los estudiantes de la siguiente forma: estás planeando un viaje de fin de semana a la ciudad de Nueva York, o cualquier ciudad que sea conveniente con un esquema lo suficientemente difícil de tarifas, y quieres saber cuánto esperas pagar en tarifas de taxis. ¿Cómo puedes predecir cuánto pagarás al viajar entre diferentes ubicaciones dentro de Manhattan? Planteado de esta forma, se da oportunidad a los estudiantes de identificar el problema más grande en cuestión: la duración del viaje y la hora del día afectan el costo de la tarifa. En este punto, los estudiantes pueden hacer suposiciones y definir sus variables. Por ejemplo, un modelo inicial puede asumir que no hay cargos adicionales o peajes, que el tráfico se mueve de manera libre y que no se dará propina. El modelo resultante será uno muy básico que tome en cuenta solo la tarifa base y el costo por 1/5 de milla. Los estudiantes necesitarán asumir que el viaje básico será de cierta distancia y que, en este momento, el problema puede ser resuelto para obtener una respuesta. La evaluación del modelo mostrará que esta tarifa es el costo mínimo esperado y que la iteración es necesaria para ganar un mejor entendimiento del costo de la tarifa de taxi. Como mínimo, el multiplicar la ecuación del modelo por 1.2 resultará en el costo esperado una vez que la propina del conductor sea tomada en cuenta. Otros perfeccionamientos pueden ser tomados en cuenta, encontrando la hora del día más cara para viajar o suponiendo un atasco durante algún periodo de tiempo. Esto resultará en un modelo que dé un estimado alto del costo, de forma que los estudiantes estén preparados para dicha circunstancia. Se puede hacer un reporte de cómo el modelo fue construido y qué cargos esperar, tal vez en el contexto de un presupuesto de viaje.

Una compañía de taxis tiene una tarifa básica de 25 zeds y un cargo de 0.2 zeds por cada kilómetro que el taxi avanza. ¿Cuál de éstas representa el costo en zeds de tomar un taxi para un viaje de n kilómetros?

A. 25 + 0.2n

B. 25 x 0.2n

C. 0.2 x (25 + n)

D. 0.2 x 25 + n

PROBLEMA A.7: ÍTEM TIMSS 2011 PARA OCTAVO GRADO M032577, COSTO EN ZEDS DE UN VIAJE EN TAXI DE N KM

CONCURSOS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Existen tres concursos notorios de modelación matemática que retan a los estudiantes a participar en actividades de modelación extremadamente realistas. Estos concursos son el *Reto Moody's Mega Math* (Reto M3), abierto a estudiantes de onceavo y doceavo grado de media superior en los Estados Unidos, el *Concurso de Modelación de Educación Media Superior* (HiMCM), abierto a estudiantes de educación media superior internacionalmente y el *Concurso Matemático de Modelación* (MCM) y el *Concurso Interdisciplinario de Modelación* (ICM), cada uno abierto a estudiantes de educación media superior y universitarios internacionalmente. Cada uno de estos concursos requiere que los estudiantes se involucren en todos los aspectos del proceso de modelación matemática, incluyendo la preparación de extensos reportes escritos de su razonamiento para la resolución del problema.

INFORMACIÓN DE LA TARIFA TOMADA CON MEDIDOR

- **La tarifa en la pantalla del medidor es: Tarifa #01 – Tarifa Urbana Estándar**
- **El cargo inicial es USD 2.50**
- **Se suman 50 centavos por 1/5 de milla o 50 centavos por 60 segundos en tráfico lento o cuando el vehículo se encuentra parado.**
- **En tráfico fluido en las calles de Manhattan, el medidor debe hacer clic aproximadamente cada 4 manzanas en el centro de la ciudad o cada manzana cuando se cruza la ciudad (Este-Oeste).**
- **Hay un Cargo Adicional Estatal MTA de 50 centavos para todos los viajes que terminen en Nueva York o los condados de Nassau, Suffolk, Westchester, Rockland, Dutchess, Orange, o Putnam.**
- **Hay un recargo por mejoras de 30 centavos.**
- **Existe un cargo adicional diario de 50 centavos de las 8 pm a las 6 am.**
- **Los pasajeros deben pagar todos los peajes de puentes y túneles.**
- **Su recibo le mostrará la tarifa total incluyendo peajes. Por favor, tome su recibo.**
- **El conductor no tiene que aceptar billetes de más de USD 20.**
- **Por favor, dele propina a su conductor por la seguridad y el buen servicio**
- **No hay cargos por pasajeros extra o maletas.**

FIGURA A.1: RESUMEN DE COMISIÓN DE LAS TARIFAS TOMADAS CON MEDIDOR DE TAXIS Y LIMUSINAS DE LA CIUDAD DE NUEVA YORK (A PARTIR DE AGOSTO DEL 2015).

El *Reto Moody's Mega Math* (Reto M3) contiene problemas que son, con frecuencia, muy contemporáneos por naturaleza, abordando cuestiones que pueden ser encontradas dentro del contexto de eventos y preocupaciones actuales. Retos M3 pasados han incluido revisiones de la Seguridad Social, el Acta de Estímulos de Estados Unidos y la independencia energética. El problema del 2015 aborda el costo financiero real de decidir o no ir a la universidad. ¿Cuánto cuesta realmente la educación superior? ¿Puede la modelación mostrar el costo, retorno y valor de una educación universitaria? El punto decisivo del problema recae en determinar si la pérdida de salarios acumulada mientras se asiste a la universidad y no se trabaja y la acumulación de deuda por el costo de asistir y otros gastos serán superados por los salarios presuntamente más altos asociados a la obtención de grados posteriores a la educación media superior.

Por ejemplo, el equipo ganador del Reto M3 del 2015 resolvió el problema usando tres iteraciones de un modelo que fue refinado una y otra vez. Para crear el modelo inicial. Los estudiantes identificaron las variables que deben ser tomadas en cuenta para determinar el costo de vida universitario, que incluye no solo el costo de la matrícula, gastos administrativos y préstamos asociados, sino la contribución familiar esperada y la pérdida de salarios mientras se atiende a la universidad a tiempo completo, por ejemplo, coste de oportunidad.

Los estudiantes hicieron suposiciones basados en datos del mundo real, identificando la edad típica del padre más viejo, la cual afecta la expectativa de contribución familiar, escogiendo usar los datos de la mediana del ingreso del hogar y los bienes, en lugar de los datos promedio, la proporción de los bienes del hogar que contribuyen al cálculo del aporte familiar esperado y la proporción de ayuda estudiantil que viene a través de préstamos y no de becas. A partir de estas y otras suposiciones, hicieron un modelo inicial del costo anual de la universidad que toma en cuenta la contribución familiar esperada, préstamos y coste de oportunidad. Después de determinar que su modelo era razonable, lo revisaron para considerar una perspectiva a 20 años, basada en el grado obtenido, por ejemplo una carrera STEM de 4 años, carrera no STEM de 4 años, diplomados y educación media superior, el costo de la universidad y las ganancias potenciales para cada uno de estos grados. Una tercera iteración del modelo fue hecha para tomar en cuenta la calidad de vida asociada con cada grado académico para ayudar a los estudiantes a determinar no solo cuál grado les proporcionará más dinero, sino cuál les dará la vida más satisfactoria. Finalmente, después de reportar las debilidades y fortalezas de su modelo final, los estudiantes ganadores proporcionaron un reporte detallado de su proceso en conjunto con recomendaciones para estudiantes de educación media superior basadas en los resultados de la implementación de éste.

El problema dado por el Reto M3, como se puede ver, requiere que los estudiantes aborden todos los aspectos del proceso de modelación matemática. La solución provista anteriormente es un ejemplo de lo que estudiantes avanzados de modelación matemática son capaces de alcanzar. Esto no significa que estos problemas no puedan ser usados como recurso de clase con estudiantes que no son modeladores avanzados. Dado que los problemas son abiertos y no restringidos a usar cierto tipo de matemáticas, los estudiantes de varios niveles pueden completarlos. Éste es el caso no solo del Reto M3, sino de los concursos de modelación matemática similares, HiMCM y MCM/ICM.

CONTRIBUCIONES NOTABLES

La aplicación de las pruebas a larga escala no es el único recurso que uno puede contemplar con el objetivo de encontrar material para usar en el aula de modelación matemática. Hay varias organizaciones centradas en las matemáticas aplicadas y la modelación matemática con respecto a su docencia, aprendizaje y evaluación. La siguiente no es, de ninguna manera, una lista exhaustiva de ejemplos de estas organizaciones, pero tiene la intención de proporcionar un panorama general del tipo de trabajos que se encuentran disponibles.

EL PROYECTO DE EVALUACIÓN EQUILIBRADA DE LAS MATEMÁTICAS (BAMP)

El *Proyecto de Evaluación Equilibrada de las Matemáticas* (BAMP) fue un proyecto basado en la Escuela de Educación de Harvard de 1993 a 2003. De este proyecto, se desarrolló una amplia biblioteca de tareas K-12, con la modelación como uno de los procesos matemáticos de interés en muchas de estas tareas.

Amontónalos es una de las tareas para la escuela primaria, K-2, desarrollada por BAMP que hace uso de la modelación. En esta tarea les presenta a los alumnos algunas palabras y frases usadas para comparar, como más chico, más grande, más alto, igual que, casi tan grande y mucho más grande. Como un ejercicio preparatorio, los alumnos deben comparar dos veces dos conjuntos escogidos de objetos encontrados en el salón de clase. La tarea central es en gran parte un ejercicio de estimación. La primera pregunta pide a los alumnos que se imaginen amontonando todos los libros de matemáticas del salón. Los alumnos deben determinar si el montón será más alto que el estudiante más alto de la clase y después, deben determinar si será más alto que su escritorio. La segunda pregunta les pide reunir y amontonar todos los libros de matemáticas del salón y hacer las comparaciones correctas entre el montón y el estudiante más alto y entre el montón y el escritorio. Finalmente, si el montón no fue tan alto como el estudiante más alto de la clase, se motiva al estudiante a estimar cuántos libros extra se necesitarán para que el montón sea de la misma altura que dicho estudiante. Esta tarea requiere que los alumnos definan variables esenciales y hagan suposiciones. Las variables más esenciales son las dimensiones del libro típico de matemáticas usado en el salón de clases y la altura del estudiante más alto. También necesitan asumir que los libros son aproximadamente del mismo tamaño y tal vez sea también necesario suponer que los libros están amontonados sobre las portadas o contraportadas, en lugar de estar apilados cuidadosamente usando el borde inferior o superior del libro.

La tarea *Magdalenas de cumpleaños* es otro ejercicio destinado a la escuela primaria desarrollado por BAMP. En ésta, se les dice a los alumnos que un padre, el Sr. Ramón, está comprando magdalenas para el cumpleaños de su hijo en la escuela. Se les explica a los alumnos que las magdalenas vienen en cajas de 6 y que cada una de las cajas contiene magdalenas solo de vainilla o solo de chocolate. Los alumnos deben determinar el número mínimo de cajas que el Sr. Ramón debe comprar para asegurar que cada uno de los 27 estudiantes de la clase tenga una magdalena. En esta tarea, los alumnos deben identificar variables esenciales al determinar que no pueden comprar cajas parcialmente llenas, que debe haber menos de una caja extra llena de magdalenas sobrantes y que, matemáticamente, el sabor no importa. Notablemente, esta tarea requiere que los alumnos construyan un modelo, como el de *Haz los cálculos,* por sí mismos, sin ninguna guía para saber qué tipo de modelo debe ser construido. Los alumnos más jóvenes pueden querer crear un modelo visual que muestre cajas con 6 círculos representando las magdalenas que contienen, tal vez asignando un número de 1 a 27 a los contenidos de estas cajas. Algunos alumnos pueden hacer uso de sumas repetidas para determinar cuántas veces necesitan sumar 6 al total antes de sobrepasar 27. Los alumnos de primaria más avanzados pueden hacer uso de tablas de multiplicar para determinar que 4 cajas dejarían a 3 alumnos sin magdalenas pero que 5 serían suficientes. La tarea requiere entonces que el alumno determine cuántas cajas debe comprar el Sr. Ramón si cada alumno debe recibir una magdalena de vainilla y otra de chocolate. El alumno debe reconocer que el modelo debe ser refinado para distinguir entre cajas de vainilla y de chocolate. Esto puede ser conseguido al dibujar cajas conteniendo dos representaciones con colores o formas distintas de magdalenas resultando en 10 cajas, 5 con 6 círculos amarillos dibujados en su interior y 5 con 6 triángulos cafés, por ejemplo. Los modelos de sumas repetidas pueden hacer uso de dos columnas separadas, ambas con el mismo trabajo en ellas. Los que hayan creado un modelo de multiplicación pueden solamente multiplicar la solución previa por 2, reconociendo que la solución simplemente será duplicada dado que el número de magdalenas por alumno ha sido duplicado.

MANUAL DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Una contribución del Teachers College de la Universidad de Columbia en Nueva York es el llamado *Mathematical Modeling Handbook (*Manual de Modelación Matemática), que fue creada en respuesta a la publicación de los CCSSM. Contiene cerca de una docena de actividades de modelación con hojas de ejercicios para los estudiantes y material para el docente. Cada actividad lleva a los estudiantes a través del proceso de modelación, comenzando por la presentación de una situación de modelación y preguntas principales para que los estudiantes respondan con un modelo.

Una actividad del manual es *Escoger una Universidad*. La pregunta principal para esta actividad es: ¿cómo puedes escoger la universidad más adecuada para ti? Esta pregunta deja la posible ruta matemática bastante abierta dado que no señala, recomienda o insinúa que un método particular deba ser usado. La primera pregunta a contestar indica al estudiante que determine, en su opinión, cuáles son los criterios más importantes de una buena universidad. Se dan algunas sugerencias a los estudiantes que pueden estar teniendo dificultades al determinar cuáles son los criterios importantes para ellos. Las sugerencias son programas de deportes, mérito académico, costo, ayuda financiera disponible y ubicación. Éste es el paso en el que las variables esenciales son definidas. Una vez que los estudiantes han determinado qué les importa más, se les pide que clasifiquen esos criterios y que determinen una forma para indicar qué tan bien su elección de universidad se ajusta a ellos. Aquí, los criterios y opciones de universidad son matematizados. Se requiere que el estudiante use esta información para crear un modelo para escoger la mejor universidad. Se le pide al estudiante que determine si el modelo le ayuda a tomar una decisión y si da los resultados esperados. Algunas sugerencias para algunos aspectos a considerar son dadas, por ejemplo, si el modelo puede ser aplicado a cualquiera que trate de escoger una universidad y si el modelo les ayuda a romper empates. Este es el paso del análisis del modelo. La siguiente fase de la actividad introduce el concepto de matrices de decisión y lleva a los estudiantes a lo largo del proceso de revisión del modelo. La última pregunta de la actividad pide a los estudiantes que traten de encontrar otras aplicaciones para el modelo que han desarrollado (ver el Problema A.8).

¿Pueden ser determinadas otras decisiones de la vida real usando matrices de decisión? Si es así, enlístalas y describe brevemente como harías para crear un modelo para cada una.

PROBLEMA A.8: ACTIVIDAD DEL MANUAL DE MODELACIÓN MATEMÁTICA, "ESCOGIENDO UNA UNIVERSIDAD", PREGUNTA FINAL REQUIRIENDO UNA EXTENSIÓN DEL MODELO

RECURSOS EXTRA

Aunque existen muchos recursos de modelación, puede ser difícil determinar qué tan bien aborda cada uno de éstos el proceso de modelación matemática y cómo puede ser implementado en el salón de clase. El *Consorcio de Matemáticas y sus Aplicaciones* (COMAP) maneja una colección de recursos y tareas disponibles de modelación matemática. Existe una discusión en progreso con SIAM para expandir estos recursos y para motivar a los miembros de la comunidad de matemáticas y educación matemática a subir nuevas tareas de modelación. Esta colección puede ser encontrada en www.mathmodels.org.

APÉNDICE B: EJEMPLOS DE MODELACIÓN DE PREESCOLAR, PRIMARIA Y SECUNDARIA

EL PROBLEMA DEL ALMUERZO

El contexto del *problema del Almuerzo* es contestar la pregunta, ¿qué debe haber en un almuerzo? Observamos este problema a través de dos perspectivas: las distintas etapas del ciclo de modelación y cómo puede ser planteado a diferentes niveles de grados académicos.

ETAPA 1: IDENTIFICAR Y ESPECIFICAR EL PROBLEMA A RESOLVER – CONTAR LA HISTORIA

Para involucrar a los alumnos en el problema del almuerzo, puede contarse una historia donde una explicación, decisión o estrategia sea requerida. Si la historia es lo suficientemente abierta, motiva a los modeladores a plantearse preguntas que les ayuden a decidir cómo aproximar un modelo y una solución.

De preescolar a segundo grado, los docentes pueden explicar a los alumnos que tienen que preparar el almuerzo para llevar en su lonchera a la escuela. De tercero a quinto grado, los docentes pueden usar la historia anterior, haciéndola más compleja al añadir consideraciones adicionales como el tamaño de la lonchera, restricciones de presupuesto y valor nutricional, siendo, probablemente, una sola restricción adicional lo suficientemente específica. De sexto a octavo grado, la misma historia con consideraciones adicionales puede ser utilizada, y a este nivel, los alumnos pueden ser capaces de manejar múltiples restricciones.

ETAPA 2: HACER SUPOSICIONES Y DEFINIR VARIABLES ESENCIALES – TOMAR DECISIONES

Una vez que los alumnos, quizás con la facilitación del docente, hayan decidido qué problema específico abordar, pueden reflexionar sobre qué información necesitarán para resolver el problema. En términos simples, necesitan resolver la pregunta, ¿qué es lo que importa?

De preescolar a segundo grado, los docentes pueden pedir a sus alumnos que digan qué cosas les importan sin señalar formalmente que las respuestas pueden llevar a suposiciones de la modelación. En el caso del *problema del Almuerzo*, esto puede incluir el decidir qué comida contendrá la lonchera y cuánta comida sería apropiada.

De tercero a quinto grado de primaria, además de generar suposiciones generales sobre qué debería contener la lonchera, los alumnos pueden considerar suposiciones pareadas y discutir la compatibilidad o incompatibilidad de éstas. Por ejemplo, tal vez quieran alimentos que contengan ciertas vitaminas, pero también quieran algún tipo de comida de su preferencia. En estos grados, esperaríamos que las estimaciones y las medidas sean más precisas.

De sexto de primaria a segundo de secundaria, los alumnos pueden ser motivados a ir más allá de comparar suposiciones al discutir las implicaciones de éstas en el contexto del problema. Podrían también justificar por qué algunas cantidades, como el número de sándwiches, deben ser fijas mientras que otras deben variar. Si hay información requerida para el modelo que no se encuentre disponible, los alumnos pueden estimar valores para cantidades y justificar sus suposiciones.

ETAPA 3: USAR MATEMÁTICAS PARA LLEGAR A UNA SOLUCIÓN – MATEMATIZANDO

Una característica importante de la modelación matemática es que los alumnos no solo eligen qué tan limitado debe ser el centro del problema, sino que se empoderan al escoger un enfoque matemático. La matematización del problema es el paso crítico para encontrar una solución.

De preescolar a segundo grado, los alumnos que trabajan el problema del almuerzo pueden votar por sus elementos favoritos del menú. Cuando se les pregunte cuáles son los alimentos más populares, los alumnos, como clase, pueden contar el número de votos para cada alimento y comparar dichos números. Esta comparación puede ser una representación visual o una representación numérica, ya que ambas pueden ayudar a la toma de decisiones.

De tercero a quinto grado, los alumnos pueden hacer lo descrito anteriormente, pero empezar a trabajar en equipos pequeños o por su cuenta para tomar decisiones. La representación final de la comparación debe ser una estadística descriptiva más formal, como una gráfica de barras o lineal. Los alumnos pueden llegar a un modelo simple como:

Almuerzo = fruta + verdura + proteína + carbohidrato + agua

Entonces, el docente puede trabajar con los alumnos en las unidades de sus ecuaciones. Éste, por ejemplo, puede preguntarles si la ecuación tiene que ver con el espacio disponible.

Espacio para el almuerzo = espacio para la fruta + espacio para la verdura + ...

O, alternativamente.

Número de elementos en el almuerzo = número de frutas + número de verduras + ...

De sexto de primaria a segundo de secundaria, los alumnos pueden usar procedimientos más sofisticados, como diseñar una encuesta para recolectar datos sobre los elementos favoritos. Entonces, los alumnos deben trabajar en grupos pequeños o por su cuenta para tomar decisiones. La representación o comparación final debe ser una estadística descriptiva aún más formal. Los alumnos a este nivel pueden también trabajar con restricciones adicionales y si han usado desigualdades, pueden añadir estas restricciones al modelo:

Número de elementos en el almuerzo = número de frutas + número de verduras + ...

1<= número de frutas <= 3

1<= número de verduras <= 2

etc.

ETAPA 4: ANALIZAR Y EVALUAR EL MODELO Y LA SOLUCIÓN - ¿TIENEN SENTIDO?

Dado que todos los modelos involucran suposiciones y aproximaciones, un aspecto crítico de la modelación matemática implica evaluar la habilidad de la solución para satisfacer el problema. ¿En qué contextos el modelo proporciona información valiosa? ¿Qué tan precisas son las soluciones? ¿Qué tanto cambian las soluciones si se varían ligeramente las suposiciones, el modelo o los parámetros? Por ejemplo, en el *problema del Almuerzo*, si el largo de la lonchera incluido como parámetro es de 25cm, usted podría preguntar qué podría cambiar si la lonchera usada fuera más larga o más corta.

De preescolar a segundo grado, los alumnos pueden representar diferentes alimentos con bloques, con el objetivo de investigar cómo empacar los almuerzos en loncheras de tamaños diferentes. Posteriormente, pueden comparar cuáles y cuántos alimentos caben dentro de cada lonchera. Todo esto capitaliza la habilidad de los niños para representar una situación, contar, comparar tamaños y hacer correspondencias 1 a 1.

De tercero a quinto grado, los alumnos pueden incluso considerar si el modelo de la lonchera que tienen realmente tiene sentido. Dado que, en este nivel, el sentido numérico de los alumnos con relación a valor posicional y fracciones se está volviendo más sofisticado, a la par que su entendimiento de la magnitud, los alumnos pueden determinar si sus medidas, es decir, la lonchera en sí, y sus elecciones en cuanto a las cantidades de alimento realmente tienen sentido. ¿Cuáles son todos los valores posibles para su modelo? ¿Los números negativos tienen sentido? ¿Qué pasa con las fracciones y los decimales?

De sexto a octavo grado, los docentes pueden pedir a los alumnos que discutan los pros y los contras de las elecciones que hicieron para el tamaño de la lonchera, la cantidad de alimento y el valor nutricional de sus elecciones de alimento. Pueden reflexionar sobre qué tan precisa tiene que ser la respuesta para ser útil. También pueden hacer uso de gráficas para hacer visualizaciones más sofisticadas de sus modelos.

ETAPA 5: LA ITERACIÓN ES NECESARIA PARA REFINAR Y EXTENDER EL MODELO – REPETIR

Con base en el análisis de la etapa 4, puede surgir la decisión de hacer algunas modificaciones al modelo, a las suposiciones o al proceso matemático. Los modelos nunca son perfectos porque son simplificaciones de la realidad y, por ende, el proceso iterativo puede ocurrir más de una vez.

A todos los niveles, el proceso de modelación es una evaluación continua de las limitaciones y fuentes de error en un modelo basado en la información disponible. Así mismo, a todos los niveles, la lonchera física puede ser cambiada a un tamaño diferente o incluso volverse una bolsa de papel. También, las elecciones de alimentos pueden cambiar. Idealmente, los alumnos a todos los niveles tendrán la oportunidad de revisar y mejorar sus modelos basándose en nuevos descubrimientos hechos durante el componente de análisis. A veces la iteración no puede ocurrir debido a restricciones de tiempo, pero incluso una discusión acerca de las mejoras posibles deja ver a los alumnos que los modelos son raramente soluciones estáticas y perfectas a un problema.

ETAPA 6: IMPLEMENTAR EL MODELO Y REPORTAR RESULTADOS – RELATAR LA HISTORIA

Los modeladores pueden repetir el modelo y mejorarlo indefinidamente, pero las fechas de entrega siempre llegan. En algún punto en la escuela y en el trabajo, es tiempo de declarar victoria. Las buenas noticias son que cuando los alumnos reporten sus resultados, pueden explicar qué habrían hecho para mejorar su modelo y en qué situaciones aplica y en cuáles no. En esta etapa final del ciclo de modelación se proporciona una oportunidad excepcional para la comunicación matemática.

De preescolar a segundo grado, dado que mucho del trabajo puede ser hecho como clase, el reporte final puede ser simplemente crear un modelo físico de la lonchera usando manipulativos para representar la lonchera y la comida.

De tercer a quinto grado, las habilidades de comunicación de los alumnos están evolucionando, por lo que ellos pueden incluir suposiciones escritas con explicaciones breves de las mismas. En este nivel, deben hacer gráficas y diagramas básicos para apoyar sus decisiones. También se les puede pedir que construyan un modelo físico de la lonchera y su contexto, pero con más precisión que la observada de preescolar a segundo grado. Pueden hacer presentaciones de sus modelos los unos a los otros, o a otra clase.

De sexto a octavo grado, las habilidades de comunicación de los alumnos se vuelven más sofisticadas de modo que pueden incluir un reporte escrito con suposiciones y sus explicaciones. El reporte debe incluir también una descripción del proceso matemático para el modelo. En este nivel, deben incluir una variedad de diagramas y gráficas más sofisticados para apoyar sus decisiones. También se les puede pedir que construyan un modelo físico a escala de la lonchera y sus contenidos. Finalmente, si el tiempo lo permite, se les puede pedir que hagan presentaciones de sus modelos los unos a los otros.

AUTOBUSES, PIZZAS Y COCIENTES

Las restricciones o consideraciones del mundo real requieren que quienes resuelven problemas continúen pensando detenidamente en una solución, o incluso consideren múltiples soluciones antes de identificar una respuesta final. Investigar y resolver problemas centrados en las matemáticas, aun cuando se necesite estar consciente del contexto, es un paso inicial en el desarrollo de la modelación matemática. A continuación, recalcamos la accesibilidad y flexibilidad de algunos problemas basados en estándares que toman poco tiempo en plantearse, pero que motivan la reflexión más allá del cálculo inicial.

Un ejemplo de un problema en el que el contexto es importante y se necesita tomar una decisión es el siguiente:

> ### EL PROBLEMA DEL AUTOBÚS
> En un autobús militar caben 36 soldados. Si 1,128 soldados están siendo transportados a su lugar de entrenamiento, ¿cuántos autobuses se necesitan?[1]

En este caso, el resultado de este cálculo estándar de cuarto grado (4.NBT.6 in CCSSM), $1128 \div 36 = 31^1/_3$, debe ser interpretado en contexto. La extensión en la cual el problema tiene una respuesta con un consenso único depende, primero, de la necesidad contextual de que el número de autobuses sea un número entero. La razón por la cual la respuesta deba ser 32 en lugar de, digamos 33 o 40, depende de la práctica implícita de usar el menor número de autobuses posibles. ¿Qué pasa si otros factores necesitan ser considerados? Por ejemplo, asumir que los soldados necesitan viajar con su grupo o pelotón y que los pelotones pueden variar en tamaño de 26 a 32 individuos. ¿Cuántos autobuses se necesitan ahora?

Para resolver este problema, usted puede motivar a los alumnos a trabajar en equipos para encontrar una solución asociada con el tamaño del pelotón y plantearles las siguientes preguntas:

- ¿Es posible que todos los pelotones sean del mismo tamaño? ¿Por qué sí o por qué no?
- Si no, ¿qué combinaciones de tamaños del pelotón son posibles?
- ¿Cuántos autobuses se necesitan para transportar a los soldados usando tu sistema de pelotones?

Ahora, está disponible más de una respuesta. Cuando los alumnos necesitan considerar los resultados de sus cálculos en contexto, hay oportunidades para que ellos reflexionen sobre las suposiciones hechas y la credibilidad de los cálculos que escojan hacer.

CONSIDEREMOS EL PROBLEMA 34 ÷ 8 = ¿?[2]

Este problema, que de hecho es la consideración de 5 problemas que se encuentran a continuación, remarca cómo el contexto es necesario para determinar una respuesta a un problema aparentemente simple. En particular, la respuesta a 34 ÷ 8 no es trivial. Podría ser 4 con residuo 2, $4\frac{2}{8}$, $4\frac{1}{4}$, 4.25, 5, o tal vez, en algunos casos, no pueda ser resuelta. Se le puede pedir a los alumnos de tercero a quinto grado que consideren los siguientes cinco problemas, todos requiriendo el cálculo de 34 ÷ 8 e identificar una solución que tenga sentido.

ROSA Y LOS TOMATES

Uno de los placeres más grandes de Rosa es cultivar tomates. Ella reparte cada tanda recolectada de forma equitativa con sus ocho amigos y se queda que con el resto. En una semana, Rosa recolectó 34 tomates. ¿Cuántos repartió a cada uno de sus amigos y con cuántos se quedó ella?

LA CARRERA DE RELEVOS

Un grupo de amigos quiere correr una carrera de relevos de 54 km desde Origenvilla hasta Rectanumérica, que es una ruta recta de un solo sentido. Cada corredor puede completar 8 km individualmente. ¿Cuántos corredores necesita el equipo para poder completar el relevo?

EL ALMUERZO VEGETARIANO

Yvonne tiene, en un café local, un sándwich vegetariano favorito. El sándwich cuesta USD 8. Yvonne ha presupuestado USD 34 para almuerzos esta semana. ¿Cuál es el número máximo de días en los que ella puede comer su sándwich vegetariano favorito en el almuerzo?

HORNEANDO GALLETAS

David está horneando galletas. Una hornada rinde 34 galletas. David quiere compartir sus galletas con sus 7 amigos. Si reparte estas galletas equitativamente entre 8 personas, incluyéndose a sí mismo, y las galletas pueden ser divididas en piezas más pequeñas, ¿cuántas galletas tendrá cada persona?

ASIENTOS PARA UNA FIESTA DE CUMPLEAÑOS

Judith invita a 33 personas a su fiesta de cumpleaños en un restaurante lujoso. El restaurante tiene mesas para 8 personas. ¿Cuántas mesas necesita reservar?

Las primeras cuatro preguntas son intencionalmente prescriptivas; por lo tanto, cuando se investigan de forma colectiva enfatizan la importancia de la perspectiva al resolver un problema. Las respuestas de las primeras cuatro preguntas son:

- Rosa: 4 con residuo 2. Sus amigos se quedan con 4 tomates cada uno y Rosa con 2.
- Carreras de Relevo: se necesitan 5 corredores
- Almuerzo: Yvonne tiene suficiente dinero presupuestado para comer su sándwich favorito 4 días
- Galletas: $4\frac{2}{8}$ o $4\frac{1}{4}$

Investigar la quinta pregunta permite a los alumnos tener flexibilidad para involucrarse en la modelación matemática con base en sus experiencias. Por ejemplo, un alumno puede señalar que se necesita redondear a 5 mesas para acomodar a todos los alumnos cómodamente. Mientras tanto, un alumno podría remarcar que, idealmente, preferiría mantener al equipo junto y podría abogar por redondear a 4 mesas, mencionando que una silla extra podría ser agregada a dos de las 4 mesas.

Los alumnos de preescolar a segundo grado pueden usar su habilidad numérica en desarrollo para investigar, bajo contexto, la solución a 34 ÷ 8 = ¿? o a problemas similares. Por ejemplo, el problema *Horneando Galletas p*uede ser presentado directamente a los estudiantes de este nivel, idealmente con muestras de galletas, ya sean reales o de papel. Haga que los alumnos investiguen las formas en las que se pueden compartir 34 galletas con 8 amigos. ¿Pueden encontrar la forma más justa para compartirlas?

De igual forma se puede usar frases con ligeras variaciones para conectar los problemas con experiencias familiares. El *problema de Rosa y los Tomates* puede convertirse en

ROSA Y LOS RECUERDOS DE LA FIESTA

Es casi el cumpleaños de Rosa. Ella tiene 34 pelotas saltarinas que dará como recuerdo de su fiesta a sus ocho amigos. Repartirá las pelotas equitativamente y se quedará con el resto.

Para motivar la creatividad adicional al usar el sentido numérico como una herramienta para resolver problemas, considere organizar a los alumnos en equipos de ocho, deles 34 unidades de un objeto en particular como marcadores, pequeñas pelotas saltarinas, cuentas o galletas y permítales identificar una forma de compartir los objetos con los demás compañeros de clase en el equipo. En algunos casos, los alumnos necesitarán tomar decisiones difíciles. Será importante que ellos expliquen cómo y por qué piensan que su solución es justa.

De sexto de primaria a segundo de secundaria, los alumnos pueden usar sus habilidades aritméticas en desarrollo para empezar a resolver problemas similares al *problema del autobús* y 34 ÷ 8. Pueden ser incorporados procedimientos matemáticos pertenecientes a este nivel para producir una solución más sofisticada. Considere el siguiente problema abierto planteado a una clase de 20 alumnos.

FIESTA DE PIZZA

Tu clase va a tener una fiesta de pizza. ¿Cuántas pizzas deben ordenar?

Una solución inicial puede ser determinada al realizar las siguientes suposiciones:

- Todos los invitados asisten.
- A todos les gusta el mismo tipo de pizza.
- Todos comen dos rebanadas.
- Hay ocho rebanadas en una pizza.

La respuesta es (20•2) / 8 = 5 pizzas. Pero ¿serán estas suposiciones razonables? En este caso, los alumnos pueden desarrollar una encuesta para saber más sobre las preferencias de pizza de sus compañeros de clase. Posteriormente, los datos pueden ser analizados usando métodos estadísticos para desarrollar una solución que determine cuánto y qué tipos de pizza se necesita ordenar.

LA HORA DEL TÉ TRAPEZOIDAL

En algunas instancias, las tareas de modelación piden a los alumnos involucrarse más intensamente con el contexto del mundo real y requieren más conexiones entre las matemáticas y este contexto. Dichas tareas, que aparecen en revistas de docentes en matemáticas como específicas para ciertos grados, pueden ser atractivas para docentes de otros niveles. Para poder usarlas, se necesitarían modificaciones a la tarea presentada para hacerla adecuada a diferentes niveles de grados académicos. En este ejemplo, identificamos cómo pueden llevarse a cabo modificaciones a una tarea original para hacerla más apropiada para el contenido de niveles de grados académicos específicos. Un ejemplo común es *La Hora del Té Trapezoidal* adaptada de: http://yspmcps.wikispaces.com/file/view/Trapezoid+Teatime-Teacher+Packet.pdf.

Es probable que en su forma original, esta tarea apareciera en una clase de quinto o sexto grado. Pero, en este momento exploraremos cómo este problema puede ser modificado para otros niveles.

De preescolar a segundo grado, se podría pedir a los alumnos que exploren opciones para colocar mesas nuevas en el comedor de estudiantes. Al hacer esto, se les pediría determinar cuántos estudiantes se pueden sentar alrededor de mesas de diferentes formas y después, que muestren sus resultados. También se les podría pedir que junten mesas de la misma y de distintas formas para dar lugar a mesas diferentes y de nuevo, estimar cuántos alumnos pueden sentarse alrededor de las mesas.

De tercero a quinto grado, además de la tarea descrita anteriormente, se podría pedir a los alumnos que exploren opciones de mesas nuevas para colocar en el comedor de estudiantes. Al hacer esto, se les pediría determinar de forma más precisa cuántos estudiantes se pueden sentar alrededor de mesas de diferentes formas, cómo se pueden colocar las mesas en el comedor, incluyendo el uso de planos cartesianos, y cuántos alumnos pueden sentarse en el comedor al mismo tiempo con ese arreglo. De nuevo, se les puede pedir que muestren sus datos para exponer sus resultados, así como también, que exploren juntar mesas de la misma y de distintas formas para determinar cuántos alumnos pueden sentarse en el comedor.

De sexto a octavo grado, además de la tarea descrita para grados anteriores, se podría pedir a los alumnos que exploren opciones de mesas nuevas para su comedor de estudiantes. Al hacer esto, se les pediría que determinen cuántos estudiantes se pueden sentar alrededor de mesas de diferentes formas basándose en el tamaño real de mesas y sillas. Se podría usar álgebra para determinar el número de estudiantes que pueden estar sentados alrededor de las mesas, si múltiples mesas son unidas para formar mesas más grandes. Se podría pedir a los estudiantes crear un diagrama a escala de la disposición espacial de las mesas y examinar qué tan rígida puede ser la transformación usada para reordenar las mesas e incrementar o disminuir la capacidad del comedor. Podrían también incluir un presupuesto formal para comprar mesas y sillas, en conjunto con exponer los datos de sus resultados.

Debe señalarse que tareas como éstas, con modificaciones, han sido usadas exitosamente en los niveles académicos mencionados como parte del proyecto IMMERSION.

El problema de la *Hora del Té Trapezoidal* puede ser atractivo para muchos docentes, pero esa tarea solo puede ser adecuada para determinados grados con modificaciones. Esta narrativa proporciona ejemplos de cómo se podría realizar estas modificaciones en una tarea para hacerla más adecuada para el nivel académico que se determine.

ACTIVIDAD DEL JUEGO DE LA BOTELLA

Un enfoque del programa IMMERSION[3] es entender cómo las perspectivas y la forma de enseñar matemáticas de docentes de preescolar y primaria cambian al involucrar a sus alumnos en la modelación matemática. Después de sesiones de formación profesional, grupos de estudio de docentes desarrollan e implementan lecciones de modelación en sus salones de clases. Esta tarea fue desarrollada como una de estas lecciones.

Varios de los problemas desarrollados por los docentes de IMMERSION han tenido el diseño como tema central. Por ejemplo, los alumnos podrían desarrollar un juego o hacer planes para un viaje o diseñar un patio de recreo. Estos problemas de diseño se interceptan con el aprendizaje basado en problemas y las Habilidades para el Siglo 21, e involucran fácilmente a los alumnos en una actividad creativa. Sin embargo, en el contexto de la modelación matemática, puede surgir un inconveniente si el trabajo se enfoca mucho tiempo en la fase de diseño y desarrollo, sin conexiones claras con las matemáticas. En estos casos, en lugar de proporcionar una base sólida a la tarea, las matemáticas surgen como accidentales o aditivas, usadas para reportar sobre lo que se haya diseñado, en lugar de ser críticas y formativas, usadas para tomar decisiones justificadas cuantitativamente.

La tarea del *Juego de la Botella* fue desarrollada y probada por un grupo de docentes en el Distrito Escolar Unificado de Pomona (PUSD, por sus siglas en inglés) en Pomona, California, en 2015. Fue probada por primera vez por los líderes docentes Grace Greenleaf y Sabrina Ortega y más extensamente desarrollada y probada por los docentes Yvette Harris, Mireya Jimenez, Nicki Lew, Jamie Santana, y Joseph Shim, trabajando con Rachel Levy de Harvey Mudd College.

Esta versión del problema fue desarrollada después de probarla en clases de tercer, quinto y sexto grado. Los días 1, 2 y 3 representan un ejemplo de cómo facilitar un problema de modelación. Posteriormente, se presentan algunas alternativas o preguntas de extensión.

DÍA 1

El docente introduce el problema general:

- Supón que estás diseñando un juego con 5 botellas de agua y 5 bolsas de granos. ¿Qué preguntas necesitarías contestar para diseñar el juego?
  (5 min)
- El docente divide a los alumnos en equipos de alrededor de 5 integrantes.

- El docente les da una tarea basada en una lluvia de ideas: Registra todas las sugerencias sin juzgarlas. Si quieres agregar una idea di “si, y” en lugar de “no” o “pero”. Esta técnica ayuda a los alumnos a generar más ideas. Cada equipo registra sus ideas en papel o computadora.
  (10 min)
- El docente reagrupa la clase y junta sus ideas. Éstas pueden incluir sugerencias como:
  > ¿Cuántas botellas deben ser usadas?
  > ¿Cómo deben acomodarse las botellas?
  > ¿Qué tan lejos debe pararse el jugador?
  > ¿Deben todos los jugadores pararse a la misma distancia?
  > ¿Cuántos intentos debe tener el jugador?
  > ¿Cómo deben ganarse los puntos o los premios?
  > (15 min)

- El docente selecciona una de las preguntas para que los equipos la afronten primero. Empezaremos con la pregunta, ¿qué tan lejos debe pararse el jugador si el juego tiene una botella y una bolsa de granos? Discuta con su equipo cómo podría recolectar, analizar y exponer datos para responder esta pregunta y justificar su conclusión. Si el docente desea asegurarse de que los alumnos usen un mismo concepto, como la proporción; media, mediana, moda; o una forma de mostrar sus datos como una tabla o un histograma, puede sugerir estas herramientas en este momento.
  (5 min)

- Los equipos de alumnos discuten enfoques.
  (10 min)

- El docente reagrupa la clase para escuchar algunas ideas. En conjunto, revisan el plan para el día 2. El equipo usa el tiempo restante para planear qué harán ese día.
  (20 min)

DÍA 2

- El docente recuerda a los alumnos el problema y plan el día. El docente contesta cualquier pregunta sobre el proceso.
- (5 min)
- Los equipos tienen un poco de tiempo para reagruparse y finalizar la planeación.
- (10 min)
- Los equipos recolectan datos. El docente puede decidir que los datos deben ser recolectados como, por ejemplo, proporciones (éxitos/intentos), o en una tabla, dependiendo de los conocimientos matemáticos propuestos.
- (20 min)
- Los alumnos crean un póster. El docente o los alumnos asignan roles para que cada miembro del equipo tenga una tarea clara, como
  > Diseño e introducción: crear el diseño general del poster incluyendo títulos de secciones y una introducción explicando el objetivo de la recolección de datos.
  > Recolección de datos: crear una descripción escrita explicando cómo recolectaron los datos y justificando las elecciones que han tomado.
  > Figura: crear un diagrama mostrando lo que hicieron.
  > Tabla: crear una tabla con cantidades que hayan medido, cuántas veces repitieron la recolección de datos y las unidades apropiadas, como tiempo, longitud, etc.

> Conclusión: explicar y justificar las respuestas a sus preguntas. Puede ser útil tener un borrador y después hacer una revisión.
(30 min)

- El docente recuerda a los alumnos que presentarán sus posters al día siguiente.

DÍA 3

- Los equipos practican a dar la explicación de los posters hechos el Día 2. Cada equipo tendrá 5 minutos para presentar su póster, con cada miembro del equipo presentando su parte en un minuto. Practican con cronómetros.
(15 minutos)
- Los equipos presentan sus posters a la clase. Al mismo tiempo, pueden grabar videos de sí mismos presentando sus posters.
(50 – 60 minutos)

ACTIVIDAD DE EXTENSIÓN 1: PRESUPUESTANDO

Los docentes que quieran que los alumnos practiquen el trabajo con decimales, dinero o simples expresiones algebraicas pueden hacerlo a través de un problema presupuestario.

Versión 1. A un fabricante de juegos le gustaría que tu equipo cree un juego para parques de atracciones con 5 botellas de agua y 5 bolsas de granos. Cada botella de agua cuesta USD 1 y cada bolsa de granos cuesta USD 1.25. El juego será jugado en un parque de atracciones. La compañía espera que 175 niños jueguen. Los premios pequeños cuestan USD 0.5 cada uno, los medianos USD 1 y los grandes USD 3.25. La compañía planea pagar USD 250 por el juego, incluyendo los premios, y quieren una ganancia de USD 100, por lo que tienes que gastar USD 150 en cada juego y en los premios. Planea cómo gastar tu presupuesto y usa matemáticas para mostrar que tu plan para el juego funcionará para 175 niños. Haz un póster con:

- un dibujo del juego
- las reglas del juego
- Extensión: si tuvieras que reducir tu presupuesto a USD 100, ¿qué cambiarías?
Justifica tu respuesta

Versión 2. Plantee el mismo problema anterior, pero haga que los alumnos creen variables para el número de cada objeto y que escriban una expresión algebraica para el costo total. Después haga que conecten los números que asignarán a cada una de las variables y que muestren que han cumplido con su presupuesto.

Versión 3. Haga que los alumnos usen una hoja de cálculo para hacer el cálculo del presupuesto. Asegúrese de que los alumnos sean capaces de registrar cualquier fórmula que usen en la hoja de cálculo ellos mismos, dado que eso les ayudará a demostrar su entendimiento matemático.

Versión 4. Ajuste la dificultad del problema al cambiar el número de niños, el presupuesto y el costo asociado a cada objeto. El costo puede ser dólares enteros, cantidades familiares, como múltiplos de USD 0.25, o cantidades poco comunes como USD 1.31.

ACTIVIDAD DE EXTENSIÓN 2: PREGUNTAS Y ENFOQUES DISEÑADOS POR ALUMNOS

Después de completar la actividad original en tres días, los docentes pueden escoger reconsiderar el juego de la botella usando un nuevo concepto matemático. Por ejemplo, tal vez los alumnos estén trabajando en:

- Una forma de exponer sus datos, como diagramas o histogramas,
- Graficar puntos en el plano cartesiano,
- Calcular medidas de tendencia central como la media, la mediana y la moda o,
- Medir en unidades métricas.

Aquí hay algunos ejemplos de preguntas que los alumnos pueden hacer sobre el juego de la botella que pueden ser respondidas con alguna de las habilidades mencionadas anteriormente. Hay varias formas de responder a cada pregunta. Este juego de preguntas y respuestas se da solo para proporcionar, para cada pregunta, un ejemplo de la dirección que los alumnos pueden tomar. En conjunto, las preguntas y respuestas ilustran las múltiples posibilidades de problemas de modelación y las soluciones dadas en el contexto de un simple juego. En el ejemplo anterior, los alumnos idearon las preguntas. Aquí, la idea es que generen el enfoque de la solución.

> ***Pregunta.*** ¿Qué tan lejos pueden las personas de nuestra clase lanzar una bolsa de granos?
> ***Enfoque.*** Haga que cada alumno lance la bolsa tres veces. Registre la mediana o la media de las distancias como el marcador de cada alumno. La clase puede discutir el uso del máximo de todos los marcadores, o sea, lo más lejos que la clase puede lanzar; el marcador mínimo, en otras palabras, que tan lejos pueden lanzar todos; la media o la mediana de los marcadores, es decir, que tan lejos lanzamos en promedio; o la moda, i.e. que tan lejos la mayoría puede lanzar.
> ***Enfoque.*** Niños desde Kindergarten hasta segundo de primaria, pueden arrojar la bolsa de granos, medir que tan lejos la lanzan y posteriormente agregar su número a un histograma usando una calcomanía u otro marcador.
>
> ***Pregunta.*** ¿Cuántas lanzadas necesita realizar una persona antes de tener una buena idea de que tan lejos lanza?
> ***Enfoque.*** Haga que cada persona lance 20 veces. Vea como la media cambia a medida que lanzan más veces. Los alumnos pueden mostrar sus datos en una tabla o graficar el número de lanzadas versus la media.
>
> ***Pregunta.*** ¿Qué tanto varían las lanzadas de la gente?
> ***Enfoque.*** Haga que todos lancen 5 veces y encuentre la diferencia entre la lanzada más larga y la más corta. Grafique todas las diferencias en un histograma, Discuta el resultado.
>
> ***Pregunta.*** ¿Qué tan lejos de la botella deberían pararse los jugadores cuando lanzan la bolsa de granos?
> ***Enfoque.*** Haga que cada persona se pare a un metro y que trate 3 veces de golpear la botella. Si fallan, registran la distancia y paran. Si tienen éxito, se alejan un metro más y tratan de nuevo.
>
> ***Pregunta.*** ¿La distancia de lanzada está relacionada con la altura de la persona?

Enfoque. Haga que todos registren su altura y qué tan lejos pueden lanzar, pudiendo tomar un promedio de tres lanzadas. Pueden graficar la altura versus la distancia de lanzada. Pueden discutir también qué tipo de gráficas indican que hay una relación y cuáles no. Pueden discutir qué tipos de gráficas pueden dificultar contestar la pregunta y cuáles parecen mostrar una relación clara o correlación.

Pregunta. ¿Cuántas botellas debe tener el juego?
Enfoque. Escoja una distancia para pararse. Marque en el suelo donde pondrá 1, 2, 3, 4 o 5 botellas. Dé a cada jugador 3 intentos con cada número de botellas. Use esos datos para argumentar sobre cuál es el mejor número de botellas. Podrían considerar cómo quieren definir un juego que es muy fácil, muy difícil, perfecto o incluso cómo quieren definir un juego que es divertido o justo. Cada uno de los equipos de cuatro alumnos puede recolectar datos para su propio equipo, después la clase completa puede combinar los datos, interpretarlos como grupo y generar un argumento acorde a sus suposiciones sobre qué hace que un juego funcione mejor.

EL PROBLEMA DE LA HUELLA

La recolección de datos conjuntamente con problemas de modelación motiva a los alumnos a explorar el razonamiento proporcional al hacerlos comparar diferentes medidas corporales, como la altura con la envergadura de los brazos, el tamaño del pie con el de la mano, el largo del brazo con el de la pierna, etc. Una versión de este tipo de ejercicio fue publicada como una versión del *Problema de la Huella* de Kara Imm y Meredith Lorber[4]. Para ilustrar cómo se desarrolla la modelación matemática en un salón de clase de preescolar hasta segundo año de secundaria, consideraremos como Imm y Lorber involucraron a los alumnos de sexto grado de Lorber con este problema planteado como una actividad de modelación, así como a relacionarlo con la facilitación del ciclo de modelación expuesto en el capítulo de preescolar, primaria y secundaria (ver Figura 2.3 del Capítulo 2).

Empezamos con una sección de Imm y Lorber relatando su experiencia, en los siguientes párrafos con sangría. Primero, ellas hablan acerca de desarrollar y anticipar la tarea al seleccionarla y modificarla para sus alumnos:

> Empezamos buscando una buena tarea de modelación y modificamos el Problema de las Huella, con los alumnos de Lorber en mente. Con los alumnos reunidos al frente del salón yo [Kara] compartí la historia de una reciente visita escolar (ver Problema B.1).
>
> Una vez que la historia había sido presentada y copias de las huellas fueron repartidas, pausamos para invitar a los alumnos a observar el contexto. -Yo no sé ustedes-, mencionamos, -pero ver esta huella nos ha dejado con muchas preguntas. Vamos a parar y pedirles a todos ustedes que escriban cualquier pregunta que tengan sobre la persona que usa este zapato, o quizá acerca de la situación en sí misma. ¿Qué es lo que quieren saber?, ¿Qué es lo que esto les hace cuestionarse? –(pag. 49).

He estado viajando a muchas escuelas y quiero compartir con ustedes algo que he visto recientemente. Algunos de ustedes saben que tenemos algunas escuelas de media superior muy grandes con dos, tres e incluso cuatro mil alumnos en el mismo edificio. Así que, cuando llegué a una de estas escuelas las últimas veces muchos adultos y niños estaban hablando sobre un supuesto vándalo que había estado escabulléndose de noche, después de que los guardias de seguridad se habían ido a casa. Alguien puede recordarnos, ¿qué es un vándalo? y, ¿qué significa vandalizar algo?

Así que, no sabemos mucho sobre este supuesto vándalo, excepto lo que él o ella dejó a su paso (casilleros desordenados, el robo de un laboratorio de química y un tablón de anuncios hecho trizas). Sin embargo, recientemente, el vándalo debe haber pisado algo en el camino hacia la escuela o fuera del lugar, porque esta persona dejó una huella, de su zapato, precisamente. Ahora, con tecnología de recreación digital del Departamento de Educación, la seguridad escolar obtuvo una imagen del zapato que creen que esta persona estaba usando. Dado que ese día estaba casualmente visitando a un profesor, tengo una copia. ¿Les gustaría verla?

PROBLEMA B.1: LA INFORMACIÓN ESCUCHADA POR LOS ALUMNOS DE LORBER ACERCA DE UNA EXPERIENCIA DE LA VIDA REAL

Para varios componentes de modelación, es muy útil hacer el siguiente tipo de preguntas: "¿de qué se dan cuenta?" y "¿qué les causa curiosidad?" Aquí son usadas para introducir una pregunta. En nuestro ciclo de facilitación de la modelación (Figura 2.3) ésta es la parte de *organizar* dentro la acción de docencia denominada *Representando*. El docente también puede pedir a los alumnos que hablen sobre las cosas que notan y sus cuestionamientos como un marco general cuando comenten su trabajo entre ellos durante el proceso de modelación. En algunos casos, puede ser valioso proporcionar guía adicional al incitar la discusión sobre la única pista: el zapato. Como resultado, la pregunta "¿qué les causa curiosidad?" puede ser suplantada por "¿qué es importante con respecto a la huella?", o "¿cómo podemos usar la huella para ayudar a resolver este misterio?". Habrá que tener cuidado de dejar a los alumnos explorar y mantener la investigación auténtica. Mientras que los alumnos están aprendiendo cómo describir su mundo en términos cuantitativos, puede ser apropiado introducir, o enfatizar mucho más, la medición, usando este problema como base.

> Como clase, decidimos explorar la pregunta, "¿qué tan alto es el vándalo?". La pregunta, como se plantea, no era notablemente diferente de otros problemas de matemáticas escolares. Así que, extendimos la pregunta a, "¿es posible determinar la altura de una persona basándose solamente en una huella?". Si es así, ¿cómo lo harías? Esta sutil extensión de las matemáticas trasladó la tarea de ser una mera actividad de resolución de problemas, como "¿qué tan alta es la persona que usa este zapato?", hacia la modelación, por ejemplo "¿existe un modelo para predecir la altura a partir de un zapato?". (pag. 49).

Observe que los docentes introdujeron una pregunta muy abierta, recolectaron muchas ideas y después, ayudaron a la clase a plantear preguntas y llegar a un consenso sobre como dirigir sus cuestionamientos. La apertura del problema pudo también haber sido enfatizada al pedir la altura aproximada de la persona. Esto significa que los alumnos de la clase plantearon el mismo problema matemático, pero podrían hacer algunas suposiciones diferentes y usar estrategias de solución diferentes. Al anticipar enfoques matemáticos diferentes, el docente puede guiar a los alumnos a centrarse en un aspecto del problema que les interese y les proporcione oportunidades para usar herramientas matemáticas, ya sea aquellas aprendidas previamente o las que se encuentren actualmente en estudio. Los docentes pueden monitorear a los equipos para ver si escogen una estrategia que introduzca un nuevo tema matemático. Pueden también reconsiderar un problema de modelación viejo después de que los alumnos hayan adquirido una nueva herramienta.

> Después, les pedimos a los alumnos que generaran una lista de objetos que necesitarían para explorar esta situación. Compilamos la lista de la clase y después les recordamos a los alumnos la existencia de la mesa de herramientas que estaba localizada de forma permanente en una esquina del salón de Lorber. ... Dado que la elección de la herramienta y las estrategias están frecuentemente ligadas, fuimos testigos de varios ejemplos de alumnos teniendo que cuestionar, resolver y negociar estas elecciones dentro de sus equipos. ¿Medirían en pulgadas o en centímetros? ¿Usar tiras grandes de papel para graficar podría ayudarles a promediar los datos? ¿Medir el ancho del zapato o tal vez, el perímetro, sería útil? ¿Las alturas autoevaluadas pueden ser confiables o los alumnos deben verificarlas? (pag. 51).

Aquí usted observa cómo los alumnos construyen soluciones y el docente reagrupa a los alumnos y facilita el proceso de hacer suposiciones y definir variables. También se encuentra monitoreando a los alumnos a medida que avanzan hacia el uso de estrategias matemáticas.

> Los alumnos lucharon con la idea de qué es lo que significa formar una relación entre dos cantidades y cómo representar y expresar dicha relación. Un equipo imaginó la altura de una persona medida con zapatos (ver Figura B.1), otra alumna argumentó que la razón entre su zapato y el zapato del sospechoso daba información sobre la razón entre alturas (ver Figura B.2) y varios trataron de discernir la relación matemática entre la longitud del zapato y la altura usando una tabla de proporciones (ver Figura B.3).

Palabras como negociar y luchar llaman la atención en cuanto a lo que mucha gente conoce como un esfuerzo productivo[5, 6]. El docente monitorea estas actividades y toma nota de los enfoques que los alumnos están siguiendo, qué matemática están empleando y si hay ideas emergentes que necesiten más matematización. Por ejemplo, si un equipo asegura que algo es mejor o más rápido, la clase puede necesitar reagruparse y discutir cómo pueden usar las matemáticas para cuantificar y medir cómo algo es mejor, de modo que puedan justificar estas afirmaciones usando matemáticas. O tal vez, el equipo está buscando realmente una solución que sea factible, en lugar de óptima, de modo que con los alumnos jóvenes usted puede preguntar si es la mejor solución o solo la solución que funciona. Los alumnos pueden trabajar con el docente para definir qué significaría que una solución fuese útil o que funcione. En este punto, los alumnos están haciendo matemáticas.

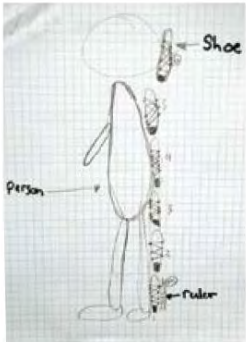


FIGURA B.1: LA ALTURA DE UNA PERSONA MEDIDA EN ZAPATOS

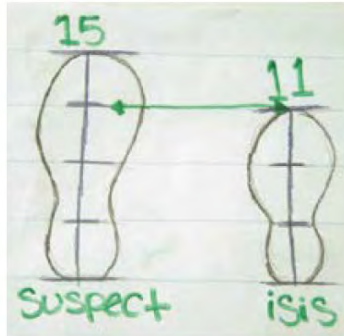


FIGURA B.2: UNA COMPARACIÓN

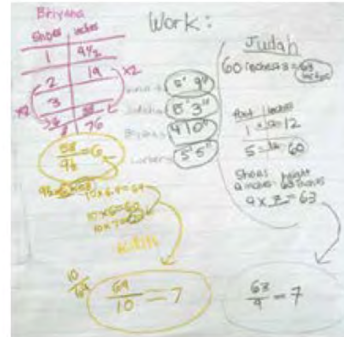


FIGURA B.1: LA LONGITUD ZAPATO DEL SOSPECHOSO Y LA ALTURA EN UNA TABLA DE PROPORCIONES

> Mientras tanto, otros pensaron en el problema de forma aditiva, observando la diferencia entre la longitud del zapato del vándalo y los suyos y no vieron ningún problema multiplicativo en absoluto. No corregimos esta idea equivocada porque el plan anual de Lorber incluía regresar al razonamiento proporcional un poco después. Adicionalmente, el salón de clases de Lorber y la cultura escolar aseguraron que los alumnos recibieran retroalimentación de sus pares; la retroalimentación con toda la clase usando un protocolo y, para aquellos que continuaran trabajando en la tarea, retroalimentación de los miembros de la comunidad durante un evento de toda la escuela. Solamente cuando el razonamiento aditivo continuó fallando como enfoque, los alumnos empezaron a considerar una estrategia diferente y revisaron su razonamiento. Los alumnos no siguieron el mismo camino ni llegaron a los mismos modelos. Sin embargo, atestiguamos las formas en las cuales cada uno desarrolló nueva matemática. Algunos vieron la tabla de proporciones por primera vez y empezaron a probarla en otros contextos. Otros lucharon con ideas relacionadas con la medición y la recolección de datos (pags. 52-53)

Aquí, las docentes hacen una observación interesante sobre las ideas equivocadas. Los docentes deben tomar decisiones acerca de cómo invierten su tiempo en la clase y cuándo sería un momento apropiado para abordar una idea equivocada en particular. De alguna forma, esto es como abordar la escritura del alumno, ya que puede no ser apropiado corregir cada error sino más bien responder a las ideas de mayor importancia como la organización o algún aspecto de la mecánica, como los apóstrofes, que puede ser un área actual de estudio para ese alumno o para esa clase.

Al final de la sesión de modelación, los alumnos debatieron la exactitud de sus soluciones y trataron de validar sus conclusiones. Por ejemplo, las docentes señalaron que "incluso fuimos testigos de un polémico debate sobre la precisión", y observaron que atestiguaron un debate contencioso sobre la precisión: si redondear los datos antes o después de que sean promediados generará una diferencia significativa. Así mismo, notaron que, por ejemplo, una conversación con toda la clase sobre si una mujer de 236 cm de altura pudiese existir les permitió interpretar sus resultados matemáticos en el contexto de la situación sin depender de sus maestros para verificar sus resultados. También se dieron cuenta de momentos en los que el proceso de modelación motivó el uso de muevas matemáticas, como la tabla de proporciones, mediciones y recolección de datos. Estas ideas pueden ser retomadas en lecciones más enfocadas en esa herramienta matemática o pueden ser usadas por alumnos en otros problemas de modelación.

RETOMANDO EL *PROBLEMA DE LA HUELLA*

En su artículo, Kara Imm y Meredith Lorber nos explican a detalle su representación de una actividad de modelación matemática con estudiantes de sexto grado. Podemos retomar el *problema de la huella* con diferentes objetivos matemáticos o niveles académicos en mente. A medida que la actividad es introducida por Imm y Lorber, los alumnos usan la modelación matemática para predecir la altura de la persona que dejó la huella. Los alumnos toman un número de aproximaciones a la solución, incluyendo unidades de medida no estandarizadas y razonamiento proporcional. Otro enfoque puede ser graficar la longitud del pie versus la altura de cada uno en la clase y después predecir la altura del sospechoso al observar donde se ajusta la huella misteriosa dentro de la tendencia de los datos.

Estas formas de abordar el problema de la huella toman un enfoque de un modelo predictivo. ¿Qué otros tipos de tareas de modelación pueden ser inspiradas por el *Problema de la Huella*? Los alumnos más jóvenes pueden centraste en la medición, comparación y extrapolación de datos. Por ejemplo, el docente podría usar una huella de uno de los zapatos de sus alumnos. Después, cada alumno puede generar un argumento matemático sobre cómo esa huella se relaciona con su propia huella. ¿Podría ser la de su zapato? ¿Por qué sí o por qué no? Otra tarea podría desarrollarse al tomar la huella de uno de los docentes o administradores de la escuela. Los alumnos pueden generar argumentos acerca de a quién le pertenece la huella.

Para alumnos mayores, el docente puede plantear el mismo *Problema de la Huella* como una tarea completamente abierta. Por ejemplo, la policía encontró la huella en la escena de un crimen y quiere saber qué pueden decir los alumnos acerca de la persona que la dejó. Si los alumnos no empiezan a pensar en la altura, el docente puede reagrupar la clase y proporcionar información adicional. Por ejemplo, tal vez la policía tiene las alturas de 60 sospechosos, a partir de fotos. La clase puede desarrollar estrategias que la policía podría usar para decidir las alturas más probables de la persona que hizo la huella.

A veces una tarea de modelación puede llevar a otras. Pensando de forma más amplia sobre los zapatos, los alumnos pueden también involucrarse en problemas donde califiquen y ordenen zapatos en la clase.

¿De cuántas formas podrían comparar zapatos? ¿Qué cualidades son importantes en un zapato? ¿Cómo es que la importancia de una cualidad se relaciona con las otras? Los alumnos más jóvenes pueden clasificar zapatos por color y crear un diagrama para identificar las elecciones más populares en la clase. Los alumnos más grandes pueden identificar y calificar cualidades importantes como el color (5 = lo aman, 1 = lo odian), el ajuste (5 = muy bueno, 1 = terrible), uso (5 = lo que necesito para la ocasión, 1 = no funciona para esta ocasión) y deseo (5 = en verdad lo quiero, 1 = no lo quiero). Cuando se compra un zapato, tal vez el ajuste y el uso son 3 veces más importantes que el color o el deseo. Así que ahora por cada juego de zapatos, alguien puede calificarlos y una compañía puede decidir cuáles son los que la gente compraría. Estos tipos de decisiones de calificación y ordenamiento pueden ser visualizados en un diagrama o matriz.

Los alumnos pueden reflexionar también sobre la geometría de la huella. Podrían tratar de resolver qué formas se combinarían para generar una huella (2D) o un zapato (3D). ¿Qué es lo que la forma generada por la huella nos dice acerca de los movimientos o el peso de la persona que usa el zapato? Ellos podrían ver tendencias de patrones y pensar sobre los zapatos de la clase. ¿Qué características de los zapatos están ahí por su aspecto y cuáles tienen una función? ¿Cómo pueden categorizar y evaluar los zapatos basados en estos atributos?
Más extensiones del *Problema de la Huella* pueden ser exploradas si se encuentra un juego de huellas consecutivas. ¿La persona que dejó las huellas se movía en cierta dirección? ¿Cómo lo sabes? ¿Qué tan rápido o lento se movía el individuo? Los alumnos más jóvenes podrían investigar estas preguntas midiendo la longitud de los pasos que crean al caminar, saltar o correr. ¿Qué pasa si el maestro crea un juego de huellas también? Los alumnos más grandes que trabajan en la versión abierta del problema pueden usar esta información adicional para aprender más acerca del sospechoso.

Un buen problema de modelación es capaz de involucrar a los alumnos a lo largo de niveles académicos con diferentes antecedentes matemáticos y es accesible a través de múltiples perspectivas matemáticas. El *Problema de la Huella* nos proporciona un escenario ejemplificativo con el que podemos explorar muchos enfoques matemáticos que pueden ser usados para entender mejor una situación de la vida real.

EL PROBLEMA DEL PATIO DE RECREO

Uno de los retos percibidos en la modelación matemática es hacerla entrar dentro del currículo existente dado que éste está dirigido a cada nivel académico por contenido específico y procesos que se espera que los alumnos conozcan y entiendan. El proceso de modelación se presta a un valioso aprendizaje en muchos dominios y aborda muchas de las prácticas matemáticas, incluyendo la *Práctica Matemática - Modela con Matemáticas o* MP4 de la CCSSM. Para ilustrar cómo una tarea de modelación en particular puede ser modificada para abordar las expectativas del contenido matemático de diferentes niveles de grados académicos, consideramos el *problema del Patio de Recreo*, escogido porque el contexto será familiar para los alumnos. Es bastante sorprendente ver el número de estándares de contenido que pueden ser abordados por una tarea de modelación, por lo que las tareas que sean escogidas apropiadamente, como ésta, pueden alinear muchos estándares de contenido.

En cada una de las descripciones de las tareas para diferentes niveles de grados académicos, hay una lista de expectativas para los alumnos. Después de estas expectativas, las diferentes facetas del contenido abordadas son enlistadas:

TAREA DE MODELACIÓN DE PREESCOLAR A SEGUNDO GRADO: EL PATIO DE RECREO

Te han puesto a cargo de diseñar un patio de recreo y necesitas hacer una presentación para la clase sobre tu diseño. Tus tareas al diseñar el patio de recreo son las siguientes:

- Basándote en las sugerencias de tus compañeros de clase, debes escoger seis piezas de equipo o espacios para incluir en el patio de recreo; (número y operación, análisis de datos y probabilidad).
- Debes dar una demostración que comunique los datos /información referentes a tus decisiones en la subtarea 1; (análisis de datos y probabilidad).
- Debes estimar cuál crees que sea el costo del equipo. Evalúa las opciones de añadir diferentes equipos o quitar algunas piezas; (número y operación).
- Debes estimar cuánto espacio podrías necesitar en tu patio de recreo; (geometría).

- Debes escoger las formas apropiadas o juntar algunas para representar el espacio que podría ser ocupado por tu equipo; (geometría).
- Debes diseñar el patio de recreo en una cuadrícula utilizando la información de tus compañeros de clase, asegurándote de decir cómo eligiste donde colocar el equipo; (geometría).
- Debes determinar el número de cada tipo de forma usada y agruparlas a partir de atributos similares como número de lados, simetría, etc.; (número y operación, análisis de datos y probabilidad),
- Debes escribir una breve descripción que explique cómo fue colocado tu equipo. Esta descripción debe incluir medidas apropiadas; (geometría, medidas, análisis de datos y probabilidad).
- Si solo pudieras elegir una pieza de equipo, ¿cómo decidirías que pieza de equipo usar?; (análisis de datos y probabilidad).

TAREA DE MODELACIÓN DE TERCER A QUINTO GRADO: EL PATIO DE RECREO

- Debes seleccionar al menos seis piezas de equipo (toboganes, columpios, cajas de arena, etc.), de las cuales una de ellas sea una cancha de baloncesto.
- Debes diseñar una encuesta para tus compañeros sobre qué equipo comprar. Los resultados deben ser incluidos en el reporte y estar relacionados con la compra y la colocación del equipo en el patio de recreo. Debes incluir alguna gráfica o tabla; (análisis de datos y probabilidad).
- Debes determinar cuál debería ser el costo del patio e incluir comparaciones de equipos diferentes; (número y operación, algebra).
- Debes usar formas geométricas bidimensionales para organizar el patio; formas más grandes deben ser usadas para piezas más grandes de equipo, mientras que las formas más pequeñas para piezas más pequeñas; (geometría).
- Debes organizar tu patio usando el primer cuadrante de un plano cartesiano. Debes identificar como tu patio está dispuesto usando el plano cartesiano y nombrar las posiciones de las esquinas de las formas usadas para representar el equipo usando pares ordenados; (geometría y medidas).
- Debes describir el ordenamiento del patio incluyendo distancias entre objetos; (geometría y medidas).
- Debes crear modelos a escala tridimensional del equipo del patio usando sólidos geométricos; (geometría).
- Debes incluir una cerca alrededor del patio de recreo e incorporar el costo de la cerca en el presupuesto: (número y operación, medidas).
- Debes minimizar el espacio del patio de recreo rectangular; (algebra, geometría y medidas).
- Debes incluir una descripción de cómo las formas podrían ser rotadas y aún encajar en el mismo espacio; (geometría).
- Debes incluir un reporte escrito para acompañar tu presentación a la clase.

TAREA DE MODELACIÓN DE SEXTO A OCTAVO GRADO: EL PATIO DE RECREO

Has sido encargado de diseñar un patio de recreo y proporcionar un reporte y un modelo a escala a los oficiales electos locales. Aquí están las expectativas:

- Debes incluir al menos seis piezas de equipo (toboganes, columpios, cajas de arena, etc.) en el patio de recreo y deben caber en el espacio con una cerca alrededor de los cuatro lados que sea de aproximadamente 15 metros por 50 metros (medidas).
- Debes completar una encuesta para tus compañeros de clase sobre qué equipo comprar. Los resultados deben ser incluidos en el reporte y estar incorporados en la compra y posicionamiento del equipo en el patio de recreo. Una gráfica apropiada debe ser incluida; (análisis de datos y probabilidad).
- Debes incluir un presupuesto que no exceda USD 100,000 y que incluya el costo de construir la cerca que rodea los cuatro lados; (número y operación).
- Debes incluir un modelo a escala del equipo que use formas geométricas tridimensionales, tal vez construido con cubos fusionados apropiadamente para crear objetos que representen el equipo; (número y operación, geometría, medidas).
- Debes colocar las formas geométricas tridimensionales creadas en un plano cartesiano para que el área que cada uno ocupe pueda ser determinada; (geometría y medidas).
- Debes mencionar qué pasaría si el equipo fuera rotado de alguna forma; (geometría)
- Debes incluir al menos 60 cm para senderos alrededor de todo el equipo. Los senderos deben estar representados en el modelo a escala. Los metros cuadrados totales de material que se necesite para construir los senderos también deben ser incluidos; (número y operación, geometría y medida).
- Debes construir el modelo a escala; (número y operaciones, geometría y medida).
- Debes incluir el área de la superficie de las estructuras, así como el volumen (cuando sea apropiado). Esto será usado para determinar la cantidad de pintura que se necesita y la cantidad de líquido o arena que se necesita para estabilizar ciertos equipos del patio de recreo; (medida).
- Debes incluir un reporte para acompañar la presentación;

Ahora, dirijamos nuestra atención a una discusión de cómo este problema evoluciona a través de varias franjas de niveles académicos mientras que simultáneamente se incrementa la demanda cognitiva. El diseño del patio de recreo empieza de preescolar a segundo grado con los alumnos organizando su patio en una cuadrícula y usando palabras para describir la posición del equipo. De tercero a quinto grado, se piden posiciones más exactas del equipo usando un plano cartesiano. Finalmente, de sexto de primaria a octavo grado, el área del patio de recreo es predeterminada y la disposición del equipo, ahora hecha a escala, debe encajar con las restricciones. En esta progresión del diseño del patio, el incremento en la demanda cognitiva puede ser visto a medida que la tarea evoluciona a lo largo de los niveles académicos. La representación del equipo evoluciona de formas bidimensionales, de preescolar a segundo grado, a tridimensionales, de tercero a quinto grado, hasta representaciones tridimensionales y a escala, de sexto de primaria a segundo año de secundaria. De forma similar, el presupuesto para el equipo involucra en la primera franja de grados un estimado del costo del equipo usando números enteros y llega hasta un presupuesto formal con restricciones que también incluye una cerca, en el último nivel académico.

Una rápida precaución debe ser incluida en esta tarea en particular, especialmente al enseñar matemáticas. Mucho de esta tarea involucra diseñar un patio de recreo y, aunque las habilidades de diseño son importantes y un componente clave de las *Habilidades del Siglo 21*, el foco debe estar en las matemáticas. El diseño del patio de recreo puede, algunas veces, opacar la enseñanza central que debe llevarse a cabo. Es verdad que las habilidades de diseño y las matemáticas se complementan una a la otra de buena manera, y que las habilidades de diseño proporcionan un contexto sólido para la enseñanza de las matemáticas, pero se debe tener precaución de que las habilidades de diseño no inhiban el aprendizaje matemático.

Terminamos la sesión con algunas notas sobre la implementación de este proyecto en el currículo. En cada nivel académico hay una modelación completa con múltiples subtareas. En muchos casos, estas subtareas pueden ser tomadas como tareas independientes o pueden usarse combinaciones de éstas. Esta decisión será determinada por las necesidades de los docentes. Por ejemplo, en la subtarea 2 de tercero a quinto grado se abordan aspectos de análisis de datos y probabilidad. En algunas instancias, cierto contenido específico necesita ser tratado. Sin embargo, es aún más importante el hecho de que algunas subtareas pueden ser usadas para introducir a los alumnos a etapas diferentes del proceso de modelación. Por ejemplo, una etapa de la modelación es hacer suposiciones. Las subtareas 1 y 2 para alumnos de grados sexto a octavo les piden que seleccionen su equipo basándose en una encuesta y que encajen en un espacio determinado.

PROYECTO DEL MINIGOLF

En este ejemplo, exploramos una tarea de modelación en forma de evaluación. En algunas instancias, un proyecto de modelación puede ser la evaluación ideal, basada en el proyecto o en el desempeño, al final de una unidad, dado que proporciona oportunidades para que los alumnos conecten, usen y apliquen muchas ideas matemáticas al mismo tiempo. El siguiente ejemplo es apropiado de sexto de primaria a segundo de secundaria, pero ha sido usado también como una evaluación en cursos sobre contenido matemático para docentes de los niveles preescolar, primaria y secundaria.

PROYECTO DEL MINIGOLF

En este proyecto de evaluación diseñarás dos campos de golf en miniatura con seis hoyos[1] más un hoyo de práctica, que tiene la forma de un polígono regular. Los dos campos deben tener los mismos seis hoyos, pero en diferentes ubicaciones. Sin embargo, el segundo diseño debe tener un hoyo de práctica diferente que continúe siendo un polígono regular.

EL PRIMER DISEÑO

Usando GeoGebra o algún otro programa de geometría dinámica, debes crear un campo de golf de seis hoyos más un polígono de práctica. En tu reporte, identifica las coordenadas de las esquinas de los hoyos con pares ordenados, así como la ubicación real de la copa, por ejemplo, el hoyo real. También, incluye el área y perímetro de cada uno de los hoyos. Si alguno de los lados de los hoyos que diseñes son paralelos, deben ser hechos con el mismo color en el diseño de GeoGebra. Adicionalmente, debes usar la función “medida de ángulo” del programa de geometría dinámica para identificar las medidas de los ángulos que componen las esquinas de tus hoyos. Si los hoyos pueden ser conformados juntando polígonos, asegúrate de indicar cómo componer los polígonos para construir tus hoyos, por ejemplo, un cuadrado más un triángulo.

Dos de los hoyos deben incluir obstáculos. Los obstáculos deben ser hechos combinando sólidos platónicos u otros objetos tridimensionales conocidos, por ejemplo, un silo hecho de un cilindro y la mitad de una esfera. Identifica el área de la superficie de los objetos y la cantidad de agua o arena que se necesita para llenar los objetos y que se mantengan anclados.

Para el hoyo de práctica, identifica el polígono regular que usaste, así como las medidas de los ángulos interiores, exteriores y centrales de dicho polígono.

[1] En la jerga de golf, el hoyo es el hueco en el “green” (área preparada donde se sitúa la bandera y que indica la posición de dicho hueco) donde debe llegar y embocar la bola.

Tu diseño puede incluir también caminos alrededor de los bordes de los hoyos. El camino debe medir por lo menos un cuadrado de ancho, dentro de la cuadrícula, en toda su extensión. Esto significa que debe haber espacio entre todos los hoyos para acomodar este diseño. Determina el área de los senderos, que, como sugerencia, es el conteo de los cuadrados.

SEGUNDO DISEÑO

Tu segundo diseño debe simplemente usar una transformación rígida para reubicar los hoyos originales a sus nuevas posiciones. Las transformaciones deben ser incluidas en el reporte. También debes determinar el área que se necesita para los senderos con el nuevo diseño, si es que hiciste esto en el diseño original.

CALCULAR EL COSTO

Ahora, tu reto es calcular el costo de construcción de cada uno de los campos de golf. Debe haber madera alrededor del perímetro de cada uno de los hoyos. Determina el costo total de la madera para construir todos los hoyos. Necesitarás comprar el material para alfombrar los hoyos. Determina el costo de la alfombra para cubrir todos los hoyos. Por la forma en la que se compra la alfombra, puedes necesitar comprar alfombra extra. También necesitas determinar el costo de la pintura de cada uno de los obstáculos y el costo del concreto necesitado para construir los senderos, que deben tener una profundidad de al menos 8 cm. Si no estás seguro de los costos, revisa el sitio de internet de alguna cadena de tiendas de productos de renovación del hogar.

TRANSFORMANDO PROBLEMAS CONOCIDOS EN PROBLEMAS DE MODELACIÓN

A veces se puede encontrar problemas de modelación muy buenos en la comunidad. Por ejemplo, tal vez en un café quieran saber cuánta leche ordenar cada semana de modo que no se les acabe pero que tampoco se eche a perder. Otros problemas vienen de actividades de modelación que han sido probadas en el salón de clases y han sido publicadas. Aquí mostraremos algunas formas para transformar problemas conocidos de libros de texto en problemas de modelación:

PREESCOLAR: CONTAR Y CALCULAR

Problema original: Cuenta de 1 a 10.
Problema de modelación: ¿Estamos comiendo suficientes verduras y frutas en el almuerzo?
Enfoque: Después del almuerzo, haga que los niños cuenten cuántas frutas y verduras comieron cada día.

PRIMER GRADO: RESTA CON INICIO DESCONOCIDO

Problema original: ¿? – 2 = 5
Problema de modelación: Tienes un puesto de limonada y quieres venderla por USD 1 por vaso. Tienes que pagar USD 2 por mezcla para la limonada, pero los vasos y el agua son gratis. Al final del día, ¿cuántos vasos de limonada tienes que vender para ser capaz de ganar USD 5? Y, ¿cuánto dinero necesitas tener al final del día en tu caja de dinero?
Enfoque: Tal vez los alumnos usen una resta. DINERO EN LA CAJA – USD 2 = USD 5

SEGUNDO GRADO: COMPARACIÓN

Problema original: ¿Qué número es más grande, dados dos números enteros?
Problema de modelación: ¿Este mes se está haciendo más cálido, frío o se mantiene igual?
Enfoques: Los niños pueden tomar un termómetro a la misma hora cada día y registrar el número que marca en una tabla. Después, pueden usar flechas para mostrar si la

temperatura bajó o subió ese día comparado con el día anterior. El docente podría también usar los signos < y > si le parece apropiado.

TERCER GRADO: DIVISIÓN

Problema original: Si tienes 1000 pretzels y la clase come 100 cada día, ¿cuántos días puede la clase comer pretzels?
Problema de modelación: Si tenemos una bolsa de pretzels y queremos que dure toda la semana, ¿cómo podemos determinar cuántos pretzels darle a cada niño por día?
Enfoques: Tal vez la clase quiera contar todos los pretzels, por lo que necesitan ser pasados en montones a todos los alumnos. Tal vez ellos quieran poner los pretzels en 5 montones e irlos pasando hasta que cuenten el mismo número en cada montón. Entonces, pueden resolver cómo dividir los pretzels de un montón entre todos los estudiantes. Al final, podrían representar este enfoque con dibujos y símbolos.

CUARTO GRADO: ÁREA DE UN RECTÁNGULO

Problema original: Encuentra el área de un rectángulo usando la fórmula Área = largo x ancho.
Problema de modelación: Encuentra el área de la superficie superior de tu escritorio usando una hoja de papel para graficar. En este caso, el escritorio tiene bordes redondeados.
Materiales proporcionados*:* láminas de papel cuadriculado de 1 cm cortadas de 20 cm por 26 cm, así las hojas originales pueden ser de tamaño carta o A4.
Enfoques: El docente les da solo 2 o 3 láminas de papel cuadrículado por equipo de modo que no puedan cubrir por completo el escritorio. Se necesitan alrededor de 8 láminas. Se tendrá que usar algo de razonamiento. Ellos contaron que hay 520 centímetros cuadrados en cada lámina. Entonces, supieron que necesitaban 8 láminas, por lo que multiplicaron 520 cm^2/hoja x 8 hojas = 4620 cm^2. Algunos equipos restaron 2 hileras de 20 cm que sobraban. Otros dejaron su respuesta en un estimado de 4620 cm^2. La mayoría de los alumnos ignoraron los bordes redondeados porque fueron de menos de un cuadrado.

QUINTO GRADO: ESTIMACIÓN, MULTIPLICACIÓN/DIVISIÓN Y PENSAMIENTO ESTRATÉGICO.

Pregunta original: Víctor necesita empacar algunos libros para almacenarlos. La tabla muestra el peso de los diferentes tipos de libros que Víctor necesita almacenar.

TIPO DE LIBRO	PESO TOTAL
Matemáticas	25 kg
Lectura	39 kg
Ciencia	34 kg

TABLA B.2: PESOS DE LIBROS

Cada caja puede cargar 14 kg. ¿Cuál es el número más pequeño de cajas que necesitamos?

A. 3 cajas
B. 7 cajas
C. 8 cajas
D. 9 cajas

Pregunta de modelación: Observa el estante de libros del aula. Haz un plan para empacarlos en cajas, de modo que uses el menor número de cajas, pero que las cajas no sean demasiado grandes para cargarlas. No tienes tiempo para medir o pesar cada libro.

SEXTO GRADO: RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Problema original: una bolsa de 20 kg de comida para perro cuesta aproximadamente USD 35. Si una porción es ½ kg por día y tienes 3 perros, ¿cuánto durará esa bolsa de comida para perros?
Problema de modelación: ¿Cuánta comida tendrías que comprar para alimentar a todos los perros callejeros del mundo por un año?, ¿cuánto costaría?, ¿cómo se compara esto con el costo de alimentar a todos los niños hambrientos del mundo por un año?

SÉPTIMO GRADO (EVALUACIÓN DEL CONSORCIO DE EVALUACIÓN SMARTER BALANCED, SBAC): CONVERSIÓN DE UNIDADES, ÁREA, DIVISIÓN Y CALCULADORA

Problema original: Estás colocando azulejos en el piso rectangular de una cocina de 2 m x 3 m y estás usando azulejos cuadrados de 8.5 cm que vienen en cajas de 60 unidades. ¿Cuál es el menor número de cajas que necesitas comprar? Si es necesario, puedes cortar los azulejos para encajar en el piso[8].
Problema de modelación: Estás colocando azulejos en el piso rectangular de una cocina de 2 m x 3 m y tienes la opción de usar azulejos cuadrados de 8.5 cm o 9.25 cm. Si es necesario, puedes cortar los azulejos para encajar en el piso, pero eso es un desperdicio de mucho tiempo y a veces se rompen. ¿Qué medida de azulejos usarías si cuestan lo mismo?, ¿cuáles usarías si los azulejos de 8.5 cm costaran la mitad, pero se rompieran más? Genera un argumento matemático.

OCTAVO GRADO: EXPRESIONES Y ECUACIONES, NOTACIÓN CIENTÍFICA

Problema original: Hormigas contra humanos. La masa promedio de un humano adulto es de 65 kilogramos, mientras que la masa promedio de una hormiga es de 4 x 10ˆ(-3) gramos. La población humana total en el mundo es de aproximadamente 6.84 billones y se estima que hay actualmente alrededor de 10,000 trillones de hormigas vivas. Con base en estos valores, ¿cómo se compara la masa total de hormigas vivas con la masa total de humanos vivos?[9]
Problema de modelación: Considera el problema anterior, pero calcula la masa de todos los humanos modelando el promedio del peso de un humano, no solo de un adulto.

9DIMENSIONES	PUNTAJE DE 0	PUNTAJE DE 1	PUNTAJE DE 2	PUNTAJE DE 3	PUNTAJE DE 4
LOS PRIMEROS 6 HOYOS MÁS EL HOYO DE PRÁCTICA DEL MINIGOLF SON CONSTRUIDOS USANDO GEOGEBRA	Sin completar	Los hoyos del minigolf están construidos con grandes imprecisiones	Los hoyos del minigolf están construidos con imprecisiones menores y el hoyo de práctica no está incluido	Los hoyos del minigolf están construidos con imprecisiones menores	Los hoyos del minigolf están bien construidos
COORDENADAS DE LAS ESQUINAS DE LOS HOYOS Y LA COPA ESTÁN INCLUIDAS EN EL REPORTE	No se incluyen las coordenadas	Se incluyen las coordenadas de todos los hoyos, pero no son cercanas a las correctas	Se incluyen las coordenadas de todos los hoyos con grandes imprecisiones	Se incluyen las coordenadas de todos los hoyos con imprecisiones menores	Las coordenadas de todos los hoyos son perfectas
PERÍMETRO	El perímetro no se incluye	Los perímetros de todos los hoyos están incluidos, pero no son cercanos a los correctos	Los perímetros de todos los hoyos están incluidos con grandes imprecisiones	Los perímetros de todos los hoyos están incluidos con imprecisiones menores	Los perímetros de todos los hoyos son perfectos
ÁREA	Las áreas no se incluyen	Las áreas de todos los hoyos están incluidas, pero no son cercanas a las correctas	Las áreas de todos los hoyos están incluidas con grandes imprecisiones	Las áreas de todos los hoyos están incluidas con imprecisiones menores	Las áreas de todos los hoyos son perfectas
LÍNEAS PARALELAS Y ÁNGULOS	Las líneas paralelas y las medidas angulares no se incluyen	Las líneas paralelas y las medidas angulares están incluidas, pero no son cercanas a las correctas	Las líneas paralelas y las medidas angulares están incluidas con errores mayores	Las líneas paralelas y las medidas angulares están incluidas con errores menores	Las líneas paralelas y las medidas angulares de todos los hoyos son perfectas
COMPOSICIÓN DE POLÍGONOS Y SÓLIDOS	La composición de polígonos y sólidos no se mencionan	La composición de polígonos y sólidos es mencionada, pero no es cercana a la correcta	La composición de polígonos y sólidos es descrita con errores mayores	La composición de polígonos y sólidos es descrita con errores menores	La composición de polígonos y sólidos es descrita perfectamente
ÁREA DE SUPERFICIES	Las áreas de superficies no están calculadas	Las áreas de superficies están calculadas, pero no son cercanas a las correctas	Las áreas de superficies están calculadas con errores mayores	Las áreas de superficies están calculadas con errores menores	Las áreas de superficies están calculadas perfectamente
VOLUMEN	Los volúmenes no están calculados	Los volúmenes están calculados, pero no son cercanos a los correctos	Los volúmenes están calculados con errores mayores	Los volúmenes están calculados con errores menores	Los volúmenes están calculados perfectamente

DIMENSIONES	PUNTAJE DE 0	PUNTAJE DE 1	PUNTAJE DE 2	PUNTAJE DE 3	PUNTAJE DE 4
MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS DE LOS POLÍGONOS REGULARES	Los ángulos de los polígonos regulares no están calculados	Los ángulos de los polígonos regulares están calculados, pero no son cercanos a los correctos	Los ángulos de los polígonos regulares están calculados con errores mayores	Los ángulos de los polígonos regulares están calculados con errores menores	Los ángulos de los polígonos regulares están calculados perfectamente
ÁREA DE LOS SENDEROS	Las áreas de los senderos no están calculadas	Las áreas de los senderos están calculadas, pero no son cercanas a las correctas	Las áreas de los senderos están calculadas con errores mayores	Las áreas de los senderos están calculadas con errores menores	Las áreas de los senderos están calculadas perfectamente
ALFOMBRADO	El teselado no se discute	El teselado es discutido, pero no es cercano al correcto	El teselado es discutido con errores mayores	El teselado es discutido con errores menores	El teselado es discutido perfectamente
LOS SEGUNDOS 6 HOYOS MÁS EL HOYO DE PRÁCTICA DEL MINIGOLF SON CONSTRUIDOS USANDO GEOGEBRA	Sin completar	Los hoyos del minigolf están construidos y etiquetados con grandes imprecisiones	Los hoyos del minigolf están construidos y etiquetados con imprecisiones menores y el hoyo de práctica no está incluido	Los hoyos del minigolf están construidos y etiquetados con imprecisiones menores	Los hoyos del minigolf están bien construidos y etiquetados
TRANSFORMACIONES DEL SEGUNDO DISEÑO	Las transformaciones no están descritas	Las transformaciones están descritas, pero no son cercanas a las correctas	Las transformaciones están descritas con errores mayores	Las transformaciones están descritas con errores menores	Las transformaciones están descritas perfectamente
COSTO	Los costos no están calculados	Los costos están calculados, pero no son cercanos a los correctos	Los costos están calculados con errores mayores	Los costos están calculados con errores menores	Los costos están calculados perfectamente
REPORTE	No hay un reporte	El reporte no está bien organizado y no expresa bien la información	El reporte está organizado, pero no expresa bien la información	El reporte no está organizado, pero expresa bien la información	El reporte está organizado y expresa bien la información
				PUNTAJE SOBRE 60	

APÉNDICE C: EJEMPLOS EXTENDIDOS

EJEMPLOS DE MODELACIÓN

Esta sección contiene cuatro problemas extendidos, cada uno ilustrando con algo de detalle el proceso de modelación y enfocándose en un componente diferente del ciclo.

El primero es el *Problema del Ascensor* (Problema C.1). Éste presenta a los docentes ejemplos de variaciones del mismo ejercicio, con diferentes niveles de gradación, para estudiantes que son nuevos en la modelación y aquellos con experiencia. Se ha señalado que el planteamiento de los problemas pertenecientes a una verdadera experiencia de modelación debe ser tan abierto como sea posible, permitiéndoles a los estudiantes trabajar con varios enfoques. Sin embargo, al comienzo del proceso los estudiantes enfrentan dificultades con la naturaleza abierta de los problemas de modelación, por lo que encontrar una forma de apoyarlos sin retirarles la aventura es esencial. Por fortuna, no hay necesidad de tener problemas diferentes para los modeladores principiantes y para los experimentados. Los mismos escenarios están abiertos a la investigación dentro de todos los niveles de experiencia, pero el apoyo proporcionado a los estudiantes puede ser ajustado a las herramientas matemáticas y a su experiencia en modelación.

El segundo ejemplo es el *Problema del Mosquito Quironómido* (Problema C.2). Los estudiantes necesitan encontrar una forma de distinguir entre dos especies diferentes de insectos que pican basándose en la longitud de la antena y el ala. De forma similar al problema anterior, éste es presentado como una investigación abierta que expone un ejemplo de las idas y venidas entre los componentes del ciclo de modelación a medida que los estudiantes crean, evalúan y mejoran sus modelos. Una de las características distintivas de la modelación, que la separa de todo aquello con lo que los estudiantes están familiarizados, es el proceso iterativo de mejorar y refinar el modelo y éste es ilustrado de forma que los lectores puedan experimentar el proceso del razonamiento de la modelación.

El tercer ejemplo es la *Distribución Justa de Fondos de Apoyo para el Desastre*. Los estudiantes deben considerar una variedad de métodos para distribuir para situaciones de desastre muy poco dinero entre solicitudes que tienen todo el mérito. Diferentes definiciones de lo que es justo son expuestas y los estudiantes deben decidir cómo implementar su método y evaluar su valor relativo en contraste con otros métodos que sean propuestos.

El cuarto ejemplo, *Manejando por Combustible*, fue presentado por primera vez en una forma ligeramente diferente en los Capítulos 1 y 3. *Manejando por Combustible* presenta una perspectiva de una actividad de clase en la cual los estudiantes trabajan juntos en pequeños grupos con el docente apoyando sus esfuerzos. En el ejemplo, el modelo es diseñado por estudiantes de Álgebra o Introducción al Cálculo que son relativamente nuevos en la modelación matemática, por lo que hay gradación y apoyo significativo en el proceso, provistos por el docente durante la presentación del problema.

EL PROBLEMA DEL ASCENSOR

El *Problema del Ascensor* puede ser usado con muchas clases diferentes. Naturalmente, entre más avanzada esté la clase, más puede esperarse de la solución. El problema no tiene prerrequisitos matemáticos y ha sido usado de forma exitosa con estudiantes de Algebra 1, Introducción al Cálculo y cursos Postcálculo. Después de trabajar varios periodos de clase con el problema, un estudiante de Introducción al Cálculo comentó: "Nunca antes, en todas mis experiencias matemáticas, había visto un problema tan abierto y variado como éste. Trabajar en un problema como éste sin una respuesta obvia y muchas opciones diferentes fue toda una nueva experiencia para mí. Este problema me ayudó a visualizar el papel que las matemáticas posiblemente jugarían en mi futuro."

Si este ejercicio se usa como incentivo o aplicación del contenido estándar, puede enfocarse en el desarrollo de una función lineal simple de dos variables en una clase de álgebra, mientras que puede centrarse en la aplicación de combinatorias en una clase que ha estudiado algo de probabilidad. También puede ser un vehículo para discutir modelos de simulación que involucren probabilidad. El *Problema del Ascensor* es tan eficiente como una pregunta totalmente abierta no relacionada con el contenido que en ese momento se esté estudiando. Los problemas como éste demuestran que la modelación a nivel medio superior involucra con frecuencia una aplicación sofisticada de conceptos muy elementales.

El problema centra la atención en la importancia de hacer suposiciones razonables y simplificadas. Como muchos problemas de modelación, el *Problema del Ascensor* puede ser tan simple o tan complejo como el docente lo desee mediante la alteración de algunos parámetros en el problema, la gradación y la conversación que el estudiante y el docente lleven a cabo durante la presentación del problema. Cada docente puede determinar qué tan difícil debe ser el problema y qué tan lejos quiere que sus estudiantes lo lleven, basándose en las metas de la actividad.

> ***Planteamiento del problema:*** Walton y Davidson, en el maravilloso volumen del Grupo Spode, Solving Real Problems with Mathematics, (Resolviendo Problemas Reales con Matemáticas), Volumen 2, presenta el *Problema del Ascensor* en la forma de una serie de memos entre tu jefe y tú, el estudiante, así como también entre tú y tu asistente, discutiendo el problema de las llegadas tarde al trabajo.

MEMO #1

De: Tu jefe

Para: Ti

Re: Llegadas tarde

He recibido numerosas quejas de que un enorme número de nuestros empleados están llegando a sus oficinas mucho después de las 9:00 a.m., debido a la incapacidad de los tres ascensores actuales para lidiar con la hora pico al principio del día. En la situación financiera actual, es imposible considerar instalar ascensores extra o incrementar la capacidad de los ya existentes por encima de la cantidad actual de 10 personas. Por favor, investiga y dame algunas posibles soluciones al problema, indicando las variadas ventajas y desventajas.

MEMO #2

De: Ti

Para: Tu asistente

Re: Llegadas tarde

Podrías investigar:

1. **¿Cuánto tiempo toma a los ascensores viajar entre pisos y por cuánto tiempo paran?**
2. **¿Cuántas personas de cada piso usan el ascensor en la mañana?**
3. **¿Cuántas personas llegaron tarde esta mañana?**

MEMO #3

De: Tu asistente

Para: Ti

Re: Respuestas a tus preguntas

1. Parece que el ascensor toma 5 segundos entre cada piso y unos 15 segundos extra en cada parada, además de otros 5 segundos si las puertas tienen que ser reabiertas. También, el ascensor se tarda alrededor de 25 segundos en llenarse en la planta baja.

2. El número de trabajadores por piso es:

PISO	PB	1°	2°	3°	4°	5°
NÚMERO	0	60	60	60	60	60

3. Alrededor de 60 personas llegaron tarde hoy.

MEMO #4

De: Ti

Para: Tu jefe

Re: Solución para el problema con ventajas y desventajas

¿?

En el planteamiento del problema, vemos que el edificio tiene 5 pisos ocupados, del primero al quinto. La planta baja (0) no es usada para negocios. Cada piso aloja 60 empleados y hay 3 ascensores (A, B y C) disponibles para llevarlos a sus oficinas por la mañana. Cada ascensor tiene capacidad para 10 personas y toma aproximadamente 25 segundos llenar un ascensor en la planta baja. Posteriormente, los ascensores tardan 5 segundos en viajar de un piso a otro y toman 15 segundos en cada piso en el que hacen parada.

Haga que los estudiantes discutan la situación y piensen sobre qué puede estar ocasionando las llegadas tarde y cómo el sistema de ascensores puede ser cambiado para resolver el problema. Como ayuda, podría hacerlos discutir los letreros de un ascensor pertenecientes a un hotel (Figura C.1).

¿Podría este sistema ser utilizado durante la hora pico de la mañana, de 8:30 a 9:00 a.m.?

SERVICIO DE ASCENSOR PARA LOS PISOS 2-5 Y 23-45

SERVICIO DE ASCENSOR PARA LOS PISOS 2-23
(ASCENSOR PARA LA PLANTA BAJA UBICADO EN BAR 10)

FIGURA C.1: LETREROS DEL ASCENSOR DE UN HOTEL COMO EJEMPLO DE SISTEMA DE ASCENSORES

HACER SUPOSICIONES RAZONABLES Y SIMPLES

Antes de proceder a discutir el problema, sería de utilidad observar algunas suposiciones básicas que se pueden hacer para simplificar y esclarecer el problema a resolver.

Los estudiantes deben hacer suposiciones sobre el proceso real para preparar su trabajo. Las suposiciones deben ser formuladas en la realidad del escenario del problema, pero permitiendo que exista algo de simplicidad en el proceso de modelación. También, deben ser consistentes con la información dada, o al menos no contradecirla.

Con frecuencia, los estudiantes tratarán de resolver el problema requiriendo a los empleados que lleguen a horarios específicos, aquellos que trabajan en el piso cuarto deben llegar a las 8:47, por ejemplo, o requiriendo a aquellos que trabajan en pisos inferiores que tomen las escaleras, pero en la medida de lo posible, nos gustaría alterar el sistema de los ascensores, no los hábitos de las personas. Motive a los modeladores a no hacer cambios en la rutina matutina actual de los trabajadores. Cambiar los patrones diarios de los empleados creará problemas entre éstos y la administración que deben ser evitados. Esto significa que necesitamos hacer suposiciones acerca de cuál podría ser la rutina actual.

Por ejemplo, no podemos asumir que todos los empleados llegan 5 minutos antes de las 9, dado que, si ese fuera el caso, habría más de 60 empleados que llegarían tarde. Dado que el jefe no escribió para quejarse de que los empleados llegan demasiado tarde a los ascensores para reportarse en su trabajo a tiempo, podemos asumir que los empleados están en los ascensores a una hora que debería permitirles llegar al trabajo, pero la operación de los ascensores no se los permite.

Nota: Haga que los estudiantes discutan razones plausibles por las que los empleados llegan tarde a su trabajo debido a la lentitud al tomar los ascensores.

Suposición 1: Suponemos que en algún momento antes de las 9, los empleados empiezan a llegar y que una vez que este proceso empieza, hay un flujo constante de empleados esperando tomar los ascensores. El memo no menciona que los empleados lleguen tarde a los ascensores, sino que llegan tarde a sus oficinas. La suposición nos da un problema realista que puede tener una solución que involucre a los ascensores.

Suposición 2: Suponemos que la situación actual es que cada ascensor lleva empleados a todos los pisos, necesitando parar en cada piso durante cada viaje. Cuando se encuentran apurados para llegar a su oficina, esperamos que los trabajadores tomen el primer ascensor disponible. Esto crea un grupo mixto que ocupa cada ascensor, lo que puede ser la razón por la que los viajes tomen tanto tiempo.

Suposición 3: Dado que el problema es hacer que los empleados lleguen a sus pisos eficientemente, suponemos que el único uso de los ascensores entre 8:30 y 9:00 es llegar de la planta baja al piso apropiado, correspondiente a su lugar de trabajo. Ignoraremos la posibilidad de que los trabajadores se muevan entre pisos, yendo del cuarto al segundo, por ejemplo, durante este tiempo.

Aunque esta suposición es claramente poco realista, no tenemos información acerca de qué tan prevalente es este movimiento, y, consecuentemente, no hay una buena forma de incorporarlo en el modelo. Más aún, tratar de hacerlo al inicio hace del problema uno mucho más complicado. Una vez que los estudiantes han creado un modelo inicial, serán capaces de añadir este elemento al problema, pero es muy importante que los estudiantes mantengan su primer modelo tan limpio y simple como sea posible. El ciclo de modelación permite refinamiento sucesivo para lidiar con componentes más pequeños, pero importantes, que han sido ignorados inicialmente. Nuestro primer modelo se centrará solamente en mover a los empleados de la planta baja al piso correspondiente.

Suposición 4: Las puertas del ascensor no se vuelven a abrir. Dado que todos se encuentran ansiosos por llegar a tiempo a su trabajo, salen de los ascensores de forma eficiente. En un primer modelo, considerar asuntos pequeños como éste puede hacer el problema más difícil, escondiendo algunas características importantes.

UN MODELO SIMPLE DEL MOVIMIENTO DEL ASCENSOR

Una forma de enfrentarse a este problema es considerar el peor escenario. Lo peor que puede pasar es que cada ascensor tenga siempre, al menos, a una persona de cada piso dentro de él. Esto significa que el ascensor hará el viaje más largo en cada oportunidad. Dado que hay 60 personas en cada uno de los 5 pisos, hay que llevar 300 empleados a sus oficinas. En promedio, esperaríamos que cada uno de los ascensores lleve 100 personas. Dado que la capacidad de cada ascensor es de 10 personas, cada ascensor hará 10 viajes. ¿Cuánto tiempo tomará hacer cada uno de estos viajes? La Figura C.2 a continuación ilustra un viaje completo. Los ascensores no se detienen en su camino hacia abajo, dado que nadie entra o sale.

El tiempo total que toma un viaje es de T = 25 + 5 (10) + 5 (15) = 150 segundos por viaje.

Dado que cada ascensor hace 10 viajes y hay 3 moviéndose simultáneamente, el tiempo total es 1500 segundos, o cerca de 25 minutos. Algunos estudiantes pueden señalar que no tenemos que contar el viaje final de regreso a la planta baja, y usar 1475 segundos como su estimado.

En el cálculo anterior, hemos hecho una suposición importante. Si tenemos una multitud de trabajadores esperando por los ascensores, entonces, cuando las puertas del ascensor se abran en la planta baja, habrá 10 empleados listos para entrar. Cada ascensor está lleno al comienzo de su viaje.

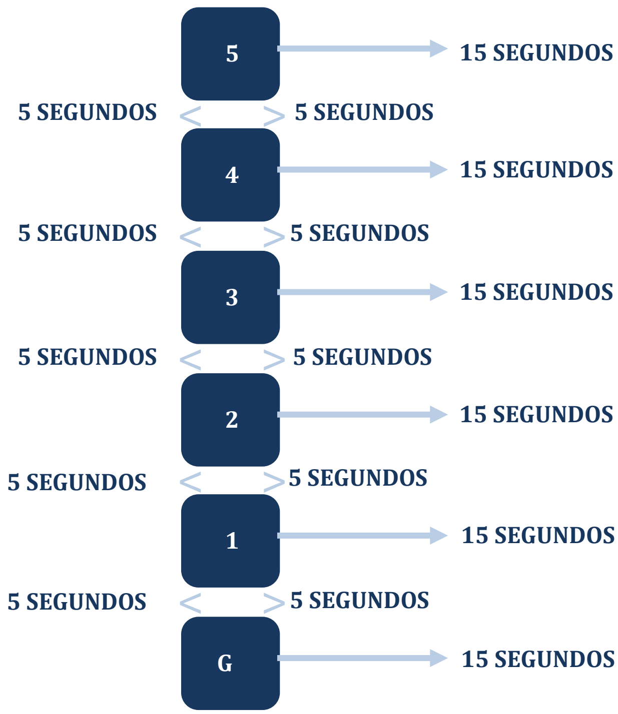


FIGURA C.2: MODELO GRÁFICO DEL TRÁNSITO DE UN ASCENSOR

Suposición 5: Cada ascensor se encuentra lleno, con 10 personas que lo abordan en la planta baja.

Nota: Una vez que tengamos una solución para el problema sencillo de 10 personas por viaje, podemos recalcular todo usando un promedio de 8 o 9 para ver cómo se comporta nuestro modelo. Queremos que el primer modelo se mantenga pulcro y limpio, para reconocer cuáles son las cuestiones importantes.

MODELAR EL ESTADO ACTUAL

Sabemos que 60 trabajadores llegaron tarde esta mañana. Sesenta trabajadores representan 6 viajes de ascensor bajo estas suposiciones. Con tres ascensores moviéndose simultáneamente, cada ascensor debe hacer dos viajes después de las 9:00. El tiempo total para mover a todos los 60 trabajadores a su piso bajo nuestras suposiciones iniciales es (2 viajes) (150 s/viaje) = 300 segundos, o 5 minutos. Necesitamos cortar cerca de 300 segundos de los 1500 segundos que nuestro modelo simple predice que toma subir a todos. Nuestro objetivo es un máximo de 1200 segundos. ¿Es esto posible?

Dado que toma alrededor de 1500 segundos para que todos sean llevados a sus oficinas y tu asistente encontró que 240 (80%) de los empleados llegaron a tiempo, podemos concluir que la gente empieza a llegar en un momento que permite que sólo 80% de los requeridos 1500 segundos ocurran antes de las nueve en punto. Es decir, empiezan a llegar alrededor de 20 minutos antes de las 9:00.

Redireccionando los ascensores: Se sugirió anteriormente en la discusión acerca de los ascensores del hotel, que redireccionar algunos de los ascensores durante la hora pico puede ser útil para la compañía. Vamos a explorar un ejemplo: ¿Qué pasaría si dos ascensores fueran a los pisos 1, 2 y 3 y un ascensor a los pisos 4 y 5? ¿Cuánto tiempo tomaría, con esta configuración, llevar a todos al piso correspondiente?

Podemos usar el diagrama anterior para modelar la situación para cada ascensor, o podemos simplemente crear una expresión algebraica cuyo valor sea el tiempo del viaje.

Haga que los estudiantes discutan de qué depende el tiempo total de tránsito de un ascensor. ¿Qué determina cuánto tiempo toma? Los estudiantes reconocerán que el tiempo de tránsito depende de dos cosas, el número (N) de pisos en los cuales para el ascensor y el piso más alto (P) al cual viaja el ascensor. El tiempo de tránsito es

$T = 25 + 10P + 15N$ segundos por viaje

En el ejemplo dado anteriormente, el viaje al primero, segundo y tercer pisos toma

$T = 25 + 10\,(3) + 15\,(3) = 100$ segundos por viaje,

Mientras que el viaje al cuarto y quinto piso toma

$T = 25 + 10\,(5) + 15\,(2) = 105$ segundos por viaje.

Como se muestra en la Tabla C.1, con esta configuración, el ascensor más lento toma 1260 segundos, una reducción de 154, que son 4 minutos menos en el tiempo de tránsito total que se hace cuando se tiene a los ascensores viajando a todos los pisos. ¿Podemos mejorarlo? ¿Podemos reducir el tiempo esperado a nuestra meta de 6 minutos?

Como se muestra posteriormente, si dejamos que un ascensor viaje a los pisos 1 y 2, y que los otros dos viajen a los pisos 3, 4 y 5 entonces podemos reducir el tiempo de tránsito total a 1080 segundos, o 7 minutos menos que cuando todos los ascensores viajan a todos los pisos. Eso cumple con nuestra meta, pero ¿hay arreglos aún mejores?

El problema puede detenerse aquí si se desea. El foco del problema puede ser disponer las suposiciones simplificadoras, generar la ecuación de tiempo $T = 25 + 10P+ 15N$ y usarla en una investigación interesante de un problema. Este problema se presta muy bien para el trabajo en equipo, dado que los estudiantes que trabajan en grupos pueden investigar rápidamente otras combinaciones prometedoras de los ascensores. Basamos nuestros cálculos en la suposición del peor caso, que el ascensor pare en cada uno de los pisos, y la suposición del mejor caso, que el ascensor esté lleno. Tenemos una solución que no requiere que los empleados alteren su horario de llegada de preferencia solo para tomar un ascensor específico entre 8:30 y 9:00. Después de las 9:00, todos los ascensores están disponibles para ser usados por todos.

ASCENSORES	PISOS SELECCIONADOS	PERSONAS TRANSPORTADAS	VIAJES REQUERIDOS	TIEMPO/VIAJE (S)	TIEMPO TOTAL DE VIAJE (S)
A & B	1, 2, 3	180	9 cada uno	100	900
C	4, 5	120	12	105	1260

TABLA C.1: TIEMPO DE TRÁNSITO TOTAL CON ASCENSOR C ASIGNADO A PISOS 4 Y 5

ASCENSORES	PISOS SELECCIONADOS	PERSONAS TRANSPORTADAS	VIAJES REQUERIDOS	TIEMPO/VIAJE (S)	TIEMPO TOTAL DE VIAJE (S)
A	1, 2	120	12	75	900
B & C	3, 4, 5	180	9 cada uno	120	1080

TABLA C.2: TIEMPO DE TRÁNSITO TOTAL CON ASCENSOR A ASIGNADO A PISOS 1 Y 2

Ahora que los estudiantes saben cómo funciona el problema, pueden incluir detalles como tener un promedio de 9 trabajadores por viaje, considerar viajes que, solo por suerte, no paran en cada piso, u otros componentes más realistas. Consideraremos algunas variaciones de nuestras suposiciones más tarde.

PRESENTAR EL PROBLEMA

El problema como está descrito hasta el momento, ha sido diseñado para estudiantes nuevos en la modelación. Este problema sirve bien como una primera aventura, por lo que una conversación con toda la clase para preparar el escenario y apoyar el desarrollo de las suposiciones es de gran ayuda para conducir a los estudiantes por una ruta razonable.

Como se menciona en *Manejando por Combustible*, hacer cuestionamientos específicos puede ayudar al estudiante a centrarse en los asuntos importantes. La meta al realizar estas preguntas no es decir a los estudiantes qué hacer, sino generar preguntas que, a medida que los estudiantes las reflexionen y discutan, enfaticen las cuestiones importantes para ellos. Es una forma de gradación. Por ejemplo, la lista de preguntas que se presenta a continuación ha sido usada en una discusión de clase con estudiantes de *Introducción al Cálculo* involucrados en esta versión simple del *Problema del Ascensor* como su primera experiencia de modelación matemática. La meta de este interrogatorio es hacer que los estudiantes piensen y lleguen a las consideraciones importantes que deben ser abordadas en el modelo. Es necesario que estas preguntas no sean excesivamente dirigidas.

- En algunos edificios, todos los ascensores pueden viajar a todos los pisos, mientras que, en otros, los ascensores están restringidos a parar solamente en ciertos pisos. ¿Por qué?
- ¿Cuál es la ventaja de tener ascensores que viajen solamente entre algunos pisos?

- Supón que es un día feriado y sólo 5 personas van a trabajar hoy. Cada persona trabaja en un piso diferente, y todos usarán el mismo ascensor. ¿Cuánto tiempo tomará para que cada uno llegue al trabajo?
- Ahora, supón que 5 personas van a trabajar y que no todas trabajan en pisos diferentes. ¿cuánto les tomará a todos llegar al trabajo?
- ¿Por qué la última pregunta es más difícil de responder que la pregunta anterior? ¿Qué suposiciones necesitarás hacer para simplificar el problema?

Estas preguntas pueden convencer a los estudiantes de hacer algunas suposiciones razonables y simplificadas sobre cómo los ascensores se ocupan en la planta baja. Las suposiciones típicas de los estudiantes incluyen:

- Habrá 10 personas esperando por el ascensor en la planta baja y el ascensor estará llenó a su capacidad, que de hecho es de 10 personas, durante cada viaje.
- Si un ascensor puede ir a un piso, entonces irá a ese piso durante cada viaje.
- Nadie usa las escaleras.
- Nadie usa el ascensor para bajar durante este periodo de tiempo, o si lo hacen, no impacta el tiempo en el que el ascensor realiza su viaje.
- Las puertas del ascensor no tienen que reabrirse en ninguno de los pisos.

Estas son suposiciones usadas en la solución básica presentada anteriormente. Las primeras dos parecerán poco realistas para los estudiantes, pero la meta de una suposición es simplificar el problema a una forma manejable, dadas las habilidades de los estudiantes. Ambas suposiciones pueden ser modificadas una vez que el problema inicial simplificado haya sido resuelto. Esto es un asunto difícil para algunos estudiantes. Como un estudiante dijo en su evaluación del problema, "Es difícil para nosotros dejar ir los detalles." Los estudiantes pueden sentir inicialmente como si hacer suposiciones fuera hacer trampa de alguna forma. Una vez que hayan pasado un ciclo de modelación y que vean que pueden regresar a sus suposiciones y modificarlas para hacerlas más realistas, aceptarán que las buenas suposiciones pueden ser poco realistas en el primer intento.

Después de que se llega a un acuerdo sobre las suposiciones básicas, se pueden realizar cuestionamientos nuevos que den que pensar.

- Si todos los ascensores van a todos los pisos, ¿cuánto tiempo les tomará a todos llegar a su trabajo?
- Si 80 personas llegaron tarde usando los ascensores sin restricciones, ¿a qué hora, aproximadamente, los empleados empezaron a llegar a la planta baja?

Una vez que esta última pregunta sea contestada, los estudiantes tienen un objetivo para la tarea. Comenzando con la misma hora de llegada, los estudiantes necesitan reducir el tiempo total para llevar a todos al piso correspondiente, en la misma cantidad de tiempo que les lleva a los 80 empleados que llegan tarde alcanzar su destino.

- Reasigna los ascensores para transportar a los empleados a sus oficinas tan rápido como sea posible. ¿Qué arreglo produce el tiempo más corto? Si este arreglo hubiera sido usado hoy, ¿todos hubieran llegado a su piso a tiempo?

Una vez completado, los estudiantes pueden ser dirigidos a reflexionar sobre su trabajo y a comentar sobre las estrategias que usaron y que pueden ser aplicadas en futuras aventuras de modelación matemática.

Ejemplos incluyen:

- Usamos un caso simple para entender la estructura del problema.
- Dibujamos un diagrama para ayudarnos a visualizar el escenario.
- Pensamos sobre qué hacía difícil el problema para ayudarnos a realizar suposiciones simplificadas.
- Consideramos el peor caso, por ejemplo, si un ascensor puede ir a un piso, irá a ese piso, y lo resolvimos en lugar de tratar de pensar en todas las distintas posibilidades.
- Encontramos una solución que funcionaba, después la modificamos para ver como podíamos mejorarla.
- Tuvimos que asegurarnos de que nuestra solución fuera realista. Algunas veces, lo "matemáticamente óptimo" no lo es en el mundo real.

Este último comentario concerniente a las soluciones matemáticamente óptimas es importante. Los estudiantes pueden ver fácilmente que si hacen que los trabajadores en un piso lleguen a una hora específica y que usen el mismo ascensor, de modo que solo se haga una parada, sería más eficiente. Pueden crear un resultado mucho mejor que el que se describe anteriormente, pero esa solución no funcionaría bien en el mundo real.

Como se ha mencionado antes, cada docente puede determinar qué tan difícil debe ser el problema y qué tanto quiere que sus estudiantes se adentren al problema, basándose en sus metas para la actividad. Un atributo de los buenos problemas de modelación es que pueden ser extendidos en diversas direcciones si los estudiantes tienen las matemáticas necesarias en su experiencia. Existen variaciones de este problema que pueden ser usadas exitosamente con estudiantes de Algebra I hasta estudiantes de Postcálculo, en AP Statistics[1].

SEGUNDA ITERACIÓN Y MEJORAMIENTO DEL MODELO

La suposición del ascensor lleno puede ser cierta al final del proceso cuando todos están ansiosos por llegar al trabajo, pero puede que no sea cierta al comienzo de éste. Suponga que, en promedio, hay sólo 9 trabajadores usando cada ascensor. En este caso, se requieren un par de viajes más. Éste es un cambio fácil de hacer, ahora que sabemos cómo funciona el proceso:

El tiempo total del viaje todavía está dado por

$T = 25 + 5\ (10) + 5\ (15) = 150$ segundos por viaje

Ahora habrá dos ascensores que hacen 11 viajes y uno que hace 12 con sólo algunos trabajadores en el último viaje (ver Figuras C.3 y C.4). Los estudiantes pueden decidir ignorar el último viaje. Si podemos reducir el número de empleados que llegan tarde de 60 a 4 o 5, en esencia hemos resuelto el problema. Es probable que la administración no esté muy preocupada con algunos trabajadores que lleguen algunos minutos después de las 9:00. Al usar la fórmula que se creó anteriormente, los estudiantes encuentran que los 11 viajes toman 1650 segundos (27.5 minutos) y que el último ascensor termina su viaje en 30 minutos. Dado que 60 trabajadores llegaron tarde, esto se traduce en tres viajes o 450 segundos. Nuestro nuevo objetivo son 1200 segundos.

La solución con un ascensor que vaya a los pisos 1 y 2 y los otros a los pisos 3, 4 y 5 continúa funcionando en este escenario. Si reducimos el número promedio a 8 por viaje, entonces

[1] Cursos avanzados de estadística a nivel universitario que se dan en media superior en Estados Unidos.

tenemos 12 o 13 viajes por ascensor (Ver figura C.5). El tiempo para estos viajes es entre 30 y 33 minutos. Nuestro nuevo objetivo es alrededor de 24 minutos o 1440 segundos.

ASCENSORES	PISOS SELECCIONADOS	PERSONAS TRANSPORTADAS	VIAJES REQUERIDOS	TIEMPO/VIAJE (S)	TIEMPO TOTAL DE VIAJE (S)
A & B	1, 2, 3	180	10 cada uno	100	1000
C	4, 5	120	14	105	1470

TABLA C.3: TIEMPO DE TRÁNSITO TOTAL CON ASCENSOR C ASIGNADO A PISOS 4 Y 5

ASCENSORES	PISOS SELECCIONADOS	PERSONAS TRANSPORTADAS	VIAJES REQUERIDOS	TIEMPO/VIAJE (S)	TIEMPO TOTAL DE VIAJE (S)
A	1, 2	120	12	75	900
B & C	3, 4, 5	180	9 cada uno	120	1080

TABLA C.4: TIEMPO DE TRÁNSITO TOTAL CON ASCENSOR A ASIGNADO A PISOS 1 Y 2

ASCENSORES	PISOS SELECCIONADOS	PERSONAS TRANSPORTADAS	VIAJES REQUERIDOS	TIEMPO/VIAJE (S)	TIEMPO TOTAL DE VIAJE (S)
A	1, 2	120	15	75	1125
B & C	3, 4, 5	180	12 cada uno	120	1440

TABLA C.5: TIEMPO DE TRÁNSITO TOTAL CON ASCENSOR A ASIGNADO A PISOS 1 Y 2

Apenas lo logramos. Si el promedio se redujera a 7 por viaje, que es un número pequeño y poco realista, entonces nuestra solución no funcionaría (pero tal vez otra variación, sí). Al recalcular con nueve y después ocho pasajeros por viaje, estamos probando la sensibilidad de nuestro modelo a la suposición de que cada ascensor está lleno. En este caso, siempre y cuando haya al menos 8 pasajeros en promedio por viaje, nuestra solución funcionaría. Decimos que nuestro modelo es bastante insensible a cambios en esta suposición.

TERCERA ITERACIÓN Y PROBABILIDAD

¿Qué tan realista es nuestra suposición del peor caso, que un ascensor vaya a cada piso posible? Por ejemplo, ¿qué tan probable es que un ascensor con 10 pasajeros no lleve ninguno de los 60 empleados que trabajan en el quinto piso?

Dado que todos los pisos tienen el mismo número de trabajadores y, por ende, la posibilidad de su presencia en el ascensor es la misma, los estudiantes pueden simular con facilidad esta probabilidad en sus calculadoras. Si cada estudiante usa el comando de números enteros aleatorios para crear 10 enteros aleatorios del 1 al 5 (randInt (1,5,10) en la calculadora TI-84), pueden simular los pisos a los que los 10 trabajadores de un ascensor irán. Si analizan los 10 enteros obtenidos con su calculadora para determinar la frecuencia con la que ninguno de estos es un 5, repiten el proceso 20 veces y analizan los resultados, verán que en aproximadamente 1 de 10 viajes no hay personas que vayan hasta el quinto piso. Así que, en lugar de 150 segundos, este viaje tomará sólo cerca de 125. Dado que hay números iguales de empleados en cada piso, los resultados para cada piso son similares.

Si los estudiantes han estudiado probabilidad, podrían hacer una aproximación binomial consistente con la simulación de números enteros aleatorios al calcular la probabilidad de que 10 trabajadores en un ascensor provengan sólo de los pisos 1 a 4, de la siguiente forma

$(4/5)^{10} \approx 0.107$.

Si han estudiado combinaciones, podrían calcular la probabilidad real como

$$\frac{\binom{240}{10}\binom{60}{0}}{\binom{300}{10}} \approx 0.103$$

Al usar simulaciones o cálculos, los estudiantes pueden esperar que, de los 10 viajes que hace un ascensor, uno de ellos vaya solamente a los primeros 4 pisos y tome sólo 125 segundos. De forma similar, encontramos que para cada piso, del primero al cuarto, 10% de los tránsitos no se detienen en ese piso. Cada uno de estos tránsitos tomaría 135 segundos. Este análisis tampoco está del todo bien, dado que solo aplica al primer viaje del ascensor. Una vez que el viaje está hecho, el número de trabajadores que va a cada piso cambia. Pero esto da una aproximación razonable que puede ser útil.

Los estudiantes más avanzados pueden también considerar si algunos del 10% de los tránsitos que no se detienen en el piso 5, tampoco lo hace en el cuarto piso. Las simulaciones mostrarán que, en 10 viajes, esto pasa tan raramente que no necesita ser considerado. La probabilidad de que un ascensor con 10 personas no lleve a nadie tanto del cuarto como del quinto piso es

$$\frac{\binom{180}{10}\binom{120}{0}}{\binom{300}{10}} \approx 0.005$$

Esto significa que esperaríamos que, de 10 viajes, ninguno se saltara 2 pisos.

De hecho, todas las combinaciones de 2 pisos tienen la misma probabilidad, dado que todos los pisos tienen el mismo número de personas. Las combinaciones de tres pisos son aún más improbables. En 10 viajes, es razonable pensar que algo del tránsito del ascensor se saltará un piso, pero ninguno se saltará más de uno. De estos 10 viajes, esperamos que 5 vayan a todos los pisos, mientras que el resto se salte uno. Así que, un tiempo de viaje esperado total más realista es 5 (150) + 1 (125) + 4 (135) = 1415 segundos, o sólo cerca de 23.5 minutos. Cada uno de los 30 viajes de ascensor tiene un tiempo esperado de viaje de 142 segundos, por lo que los tres viajes finales aún requieren una reducción de cerca de 7 minutos. Esto no difiere mucho del primer análisis. Tener un número desigual de empleados en los pisos incrementa la importancia de las consideraciones probabilísticas y puede ser trabajado por modeladores más expertos o estudiantes más avanzados.

Al usar los dos escenarios de muestra de nuestro primer modelo, podemos incorporar la probabilidad de saltarnos un piso designado. Si un ascensor va a solo tres pisos, llevando 90 usuarios, entonces las simulaciones muestran que la probabilidad de que se salte un piso es sólo de 1 en cada 100 viajes. Dado que cada ascensor solo hace 9 viajes, es poco probable que ocurra. Para cada ascensor que se detenga solo en dos pisos, la probabilidad de saltar un piso es insignificante. El resultado es que los tiempos de viaje esperado son los mismos, pero nuestro objetivo se ha vuelto un poco más pequeño. Siempre y cuando haya números iguales de trabajadores en cada piso, no perdemos mucho en nuestro modelo al considerar el tiempo de viaje en el peor caso. En muchos edificios de oficina, los pisos superiores tienen oficinas más grandes y salas de juntas, por lo que pocos empleados trabajan ahí. En estos edificios, es bastante común que los ascensores no viajen a todos los pisos.

En muchos casos, estas consideraciones de probabilidad están mucho más allá de las habilidades de los estudiantes y el interés del docente. Sin embargo, es una buena aplicación de probabilidad, ya sea a través de la simulación o del cálculo para estudiantes en clases que consideren modelos de probabilidad.

CUARTA ITERACIÓN, SI SE DESEA

Como se señaló anteriormente, el problema puede ser terminado con facilidad después del primer modelo. Los modeladores más experimentados deben considerar probar la suposición de que el ascensor siempre va lleno y hacer algunas simulaciones para obtener un tiempo de viaje más realista. Si los estudiantes han hecho ambas, deben considerar combinar el promedio de 9 por viaje con el número esperado de pisos no visitados para producir un modelo final que capture más de la realidad de la situación de lo que se logró en el primer modelo. La decisión de qué tan lejos llevar un proyecto de modelación descansa en el docente y en las metas del proyecto. El problema sirve bien como experiencia de modelación, pero puede ser usado para introducir simulaciones probabilísticas o como una oportunidad de usarlas si ya han sido aprendidas anteriormente.

VARIACIONES ADICIONALES AL PROBLEMA PARA ESTUDIANTES MÁS AVANZADOS/EXPERIMENTADOS

Los docentes pueden incrementar o disminuir la dificultad del problema al cambiar el número de ascensores o de pisos. Tener poblaciones desiguales en los pisos incrementa significativamente el reto que se ofrece en este problema. Añadir una constricción temporal para cuando las puertas tienen que reabrirse cuando el ascensor se encuentra abarrotado cambia el tiempo de la ecuación. Los estudiantes necesitan determinar en qué situaciones la puerta será, probablemente, reabierta.

Para una clase avanzada, se sugieren las siguientes distribuciones de empleados:

MEMO #3

De: Tu asistente

Para: Ti

Re: Respuestas a tus preguntas

1. Parece que el ascensor toma 4 segundos entre cada piso, unos 10 segundos extra en cada parada, y otros 5 segundos si las puertas tienen que reabrirse. El ascensor también tarda alrededor de 15 segundos en llenarse en la planta baja.

2. El número de trabajadores en cada piso son:

PISO	PB	1°	2°	3°	4°	5°	6°
NÚMERO	0	80	80	40	80	20	20

3. Alrededor de 70 personas llegaron tarde hoy.

En este escenario, habrá 32 viajes de ascensor si todos están llenos. Claramente, con solo 20 empleados en los pisos 5 y 6, no todos pararán en cada piso. En este escenario, los cálculos de probabilidad son esenciales. También, con un número diferente de trabajadores en los pisos y con la adición de un sexto piso, existen más combinaciones de viajes de ascensor a ser consideradas por los estudiantes. Otra variación es añadir un cuarto ascensor para incrementar, una vez más, el número de opciones que deben ser consideradas.

EL PROBLEMA DEL MOSQUITO QUIRONÓMIDO

En este problema, ilustramos varias repeticiones dentro de un solo ciclo de modelación. Aunque es importante que los estudiantes que inician en la modelación trabajen con componentes del ciclo más cortos y pequeños para desarrollar sus habilidades, tener experiencia con los aspectos iterativos de la modelación es esencial.

En este problema los estudiantes necesitan encontrar una forma para distinguir dos especies diferentes de insectos que pican, basándose en las longitudes de sus alas y antenas. En este ejemplo, los pasos en el ciclo de modelación son resaltados para ilustrar el ir y venir entre componentes del ciclo a medida que los estudiantes crean, evalúan y mejoran sus modelos. Una de las características distintivas del ciclo de modelación, que lo separa de la mayoría de las actividades matemáticas con las que los estudiantes están familiarizados, es el proceso iterativo de mejorar y refinar el modelo. En gran parte de sus experiencias matemáticas pasadas, una vez que la solución es encontrada, ésta es o correcta o incorrecta, y de cualquier forma, el problema está terminado. En la modelación matemática, cada solución genera una nueva posición de inicio para empezar de nuevo y mejorar sobre la solución previa.

En 1981, dos variedades de pequeños insectos que pican llamados mosquitos quironómidos fueron descubiertos por los biólogos W. L. Grogan y W. W. Wirth en las junglas de Brasil. Nombraron a un tipo de quironómido *Apf* y al otro, *Af*. Los biólogos descubrieron que el quironómido *Apf* es portador de una enfermedad debilitante que ocasiona inflamación cerebral cuando los humanos son picados por un mosquito infectado. Aunque la enfermedad es raramente fatal, la discapacidad causada por la inflamación puede ser permanente. La otra forma de quironómido, el *Af*, es inofensivo. En un esfuerzo por distinguir las dos variedades, los biólogos tomaron medidas de los mosquitos que capturaron. Las dos medidas que pudieron obtenerse con más facilidad fueron la longitud de sus alas y antenas, ambas medidas en centímetros.

MOSQUITOS QUIRONÓMIDOS *AF*

LONGITUD DEL ALA	1.72	1.64	1.74	1.70	1.82	1.82	1.90	1.82	2.08
LONGITUD DE LA ANTENA	1.24	1.38	1.36	1.40	1.38	1.48	1.38	1.54	1.56

MOSQUITOS QUIRONÓMIDOS *APF*

LONGITUD DEL ALA	1.78	1.86	1.96	2.00	2.00	1.96
LONGITUD DE LA ANTENA	1.14	1.20	1.30	1.26	1.28	1.18

¿Es posible distinguir un mosquito *AF* de un *ApF* con base en la longitud del ala y de la antena?

Si es así, usa tu método para clasificar tres nuevos mosquitos quironómidos con longitudes de ala y antena de (1.80, 1.24), (1.84, 1.28) y (2.04, 1.40).

PROBLEMA C.2: EL PROBLEMA DEL MOSQUITO QUIRONÓMIDO

IDENTIFICAR Y ESPECIFICAR EL PROBLEMA A RESOLVER

Nuestra meta es encontrar una forma simple pero efectiva de distinguir un mosquito peligroso *Apf* de un inofensivo *Af*, usando las medidas de la antena y el ala como base para la decisión. Una vez que hayamos decidido un método, lo aplicamos para clasificar a los tres nuevos mosquitos.

Un lugar natural para empezar es pensar en las suposiciones bajo las cuales construimos nuestro modelo. Por ejemplo, los 15 mosquitos mostrados en la tabla deben ser, de alguna forma, representativos de su especie. Si no, ninguna cantidad de matemáticas puede llevar a conclusiones útiles. Hacer lluvia de ideas sobre estos cuestionamientos debe resultar en una primera ronda de suposiciones para el modelo. Más suposiciones pueden ser añadidas después, a medida que se gane conocimiento y, con suerte, algunas podrían ser eliminadas a medida que el modelo mejora. En el *Problema del Mosquito Quironómido,* ¿qué otros atributos deben estar presentes para que los datos sean útiles?

HACER SUPOSICIONES APROPIADAS Y DEFINIR LAS VARIABLES ESENCIALES

Suposiciones

- Supón que los mosquitos capturados son representativos de su clasificación y que pueden ser considerados una muestra aleatoria de mosquitos. Necesitamos hacer esta suposición para que nuestro modelo sea útil durante el proceso de clasificación.
- Todos los mosquitos son *Af* o *Apf,* no hay un tercer tipo de mosquito a ser considerado. Esta suposición nos asegura que los tres mosquitos desconocidos serán de uno de los dos tipos.
- Supón que ningún tipo de mosquito es o proclive o adverso a ser atrapado, de modo que las proporciones de captura son representativas de sus proporciones relativas en la naturaleza. Esto nos permite pensar críticamente sobre el número más grande de mosquitos *Af* capturados y decidir si debemos favorecer a los mosquitos *Af* debido a su prevalencia observada.
- Las clasificaciones de los mosquitos capturados son correctas, es decir, ninguno ha sido clasificado erróneamente. Obviamente, si uno o más de los mosquitos capturados ha sido clasificado incorrectamente, nuestro modelo continuará con ese error.

Al observar los datos y los diagramas provenientes de estos, ¿qué, en todo caso, llama tu atención o curiosidad? ¿Qué aspectos pueden ser útiles al desarrollar el modelo? Empiece observando algunos diagramas de los datos.

A partir de diagramas de dispersión de los dos conjuntos de datos bivariados, notamos que el mosquito *Af* tiene, en general, alas más pequeñas y antenas más largas que el mosquito *Apf.* Además, hay una mayor variabilidad en las longitudes medidas de los mosquitos *Af,* lo que puede ser útil. Finalmente, todos los datos observados terminan en un dígito par. Esto es curioso, pero no es obvio qué es lo que significa. ¿Podemos usar algunas o todas estas observaciones para captar algunas distinciones importantes entre las especies? Si es así, ¿cómo podemos expresar estas observaciones en formas matemáticas útiles?

Notamos en el diagrama de dispersión que, en ambas especies de mosquitos, las longitudes de las alas y antenas están relacionadas razonablemente de forma lineal. Debemos entonces asumir que la relación se extiende más allá de los datos observados, hasta las poblaciones. Si es así, podemos usar modelos lineales para ayudar en la clasificación.

- Supón que la relación lineal observada entre la longitud del ala y la de la antena para ambas especies puede ser extendida a otros individuos de su especie. Esta suposición nos permite hacer predicciones más allá de los datos observados.

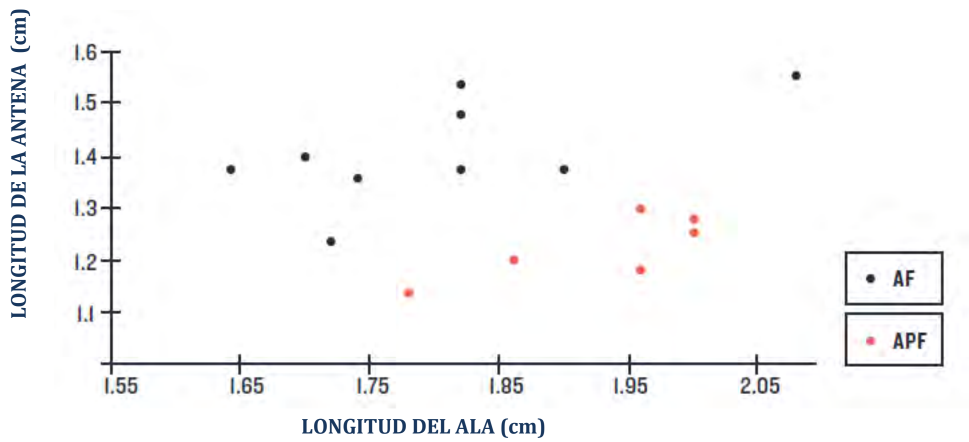


FIGURA C.3: DIAGRAMA DE DISPERSIÓN DE LOS DOS CONJUNTOS DE DATOS

HACER LAS CÁLCULOS: OBTENER UNA SOLUCIÓN

En el diagrama de la Figura C.3, podemos observar que hay una región entre los dos conjuntos de datos. Parece razonable pensar que podemos definir un límite que separe las dos especies. Pero ¿dónde debe ser ubicado y qué razonamiento usamos para decidir donde lo colocamos?

Podemos ajustar una línea de mínimos cuadrados a cada conjunto de datos, usando *Longitud del Ala* como variable independiente y *Longitud de la Antena* como variable dependiente. El ajuste de línea de mínimos cuadrados de mosquitos *Af* es $y = 0.479x + 0.549$, mientras que para *Apf* es $y = 0.558x + 0.151$.

La mejor forma de determinar si un modelo lineal es apropiado para un conjunto dado de datos es observar la gráfica de residuos, que es un diagrama de dispersión de la diferencia entre el valor real observado de la *Longitud de la Antena* y aquellos estimados por la ecuación lineal. Así que, para los mosquitos *Af*, graficamos los datos indicados en la gráfica de residuos (Figura C.5)

Si la gráfica de residuos muestra una dispersión aleatoria, entonces el modelo es considerado como apropiado para los datos. Si el modelo lineal captura la esencia de la tendencia o patrón de los datos, entonces los residuos, que son lo que queda cuando la tendencia es removida, deben ser “ruido” aleatorio. La dispersión aleatoria de las gráficas de residuos en la Figura C.6 indica que el modelo lineal es plausible para cada especie.

ANALIZAR Y EVALUAR EL MODELO Y LA SOLUCIÓN

Hemos creado modelos lineales para cada especie de mosquito. ¿Cómo podemos usar estos dos modelos lineales para clasificar las dos especies de mosquitos? Un enfoque común para los estudiantes es “promediar” las dos ecuaciones lineales para crear el punto medio entre ellas, lo cual divide la región en dos. Parece ser algo natural de hacer con las dos líneas, pero los estudiantes casi nunca promedian las ecuaciones.

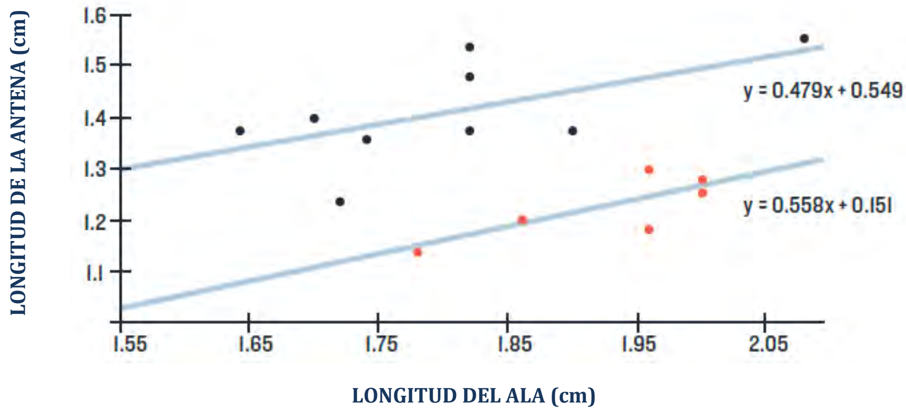


FIGURA C.4: AJUSTE DE LÍNEAS DE MÍNIMOS CUADRADOS PARA CADA CONJUNTO DE DATOS

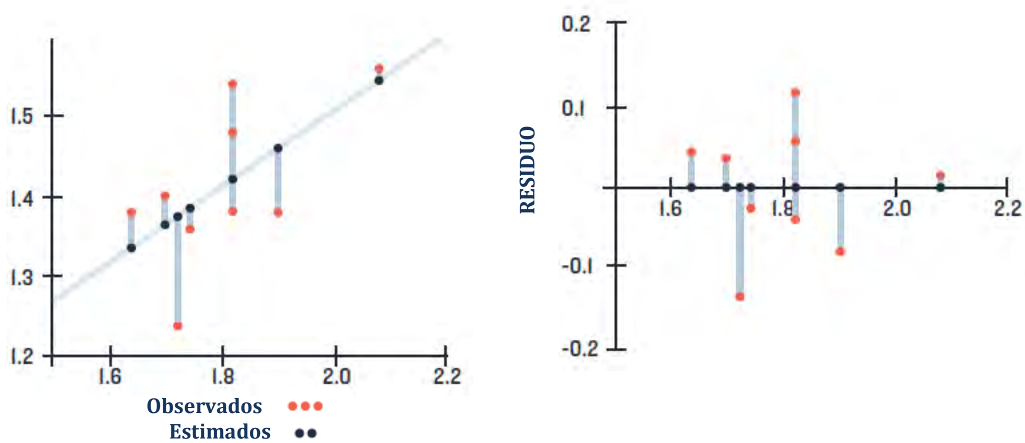


FIGURA C.5: GRÁFICAS DE RESIDUOS

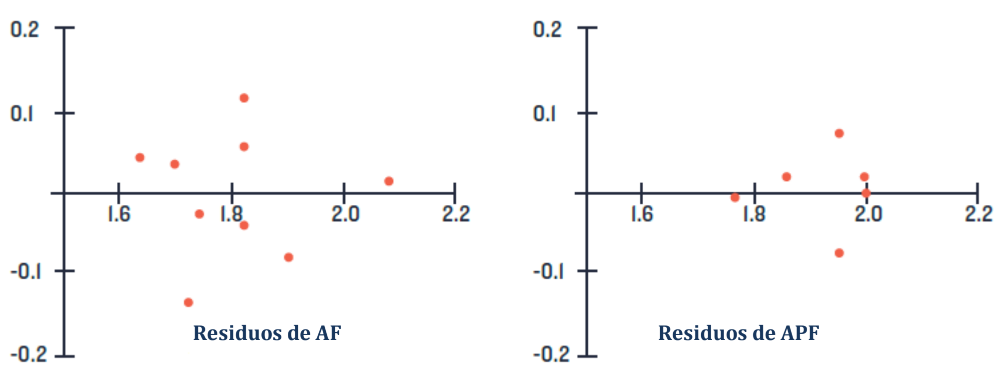


FIGURA C.6: RESIDUOS PARA MODELOS DE MÍNIMOS CUADRADOS

HACER LOS CÁLCULOS: OBTENER UNA SOLUCIÓN

Para encontrar la línea media entre estas dos líneas, simplemente suma las dos ecuaciones y divide entre dos. El límite determinado de esta forma es $y = 0.5185x + 0.350$. Cualquier mosquito por debajo de esta línea podría ser considerado un mosquito *Apf*, mientras que cualquier mosquito por encima de la línea sería considerado un mosquito *Af*.

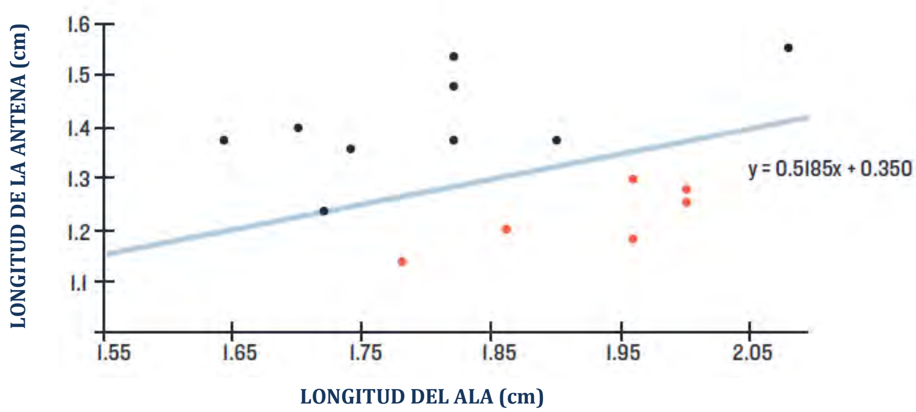


FIGURA C.7: LÍNEA MEDIA DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS.

La recta creada por la línea media de estos dos modelos de regresión es deficiente, dado que clasifica incorrectamente a un mosquito *Af* como *Apf*. Hemos asumido que todos los mosquitos conocidos estaban correctamente clasificados, así que necesitamos abordar este problema.

Si hubiéramos intentado encontrar un límite seguro entre las especies, podríamos argumentar que esta clasificación errónea fue un precio razonable a pagar por la seguridad añadida. Todos los mosquitos peligrosos han sido detectados, lo que puede ser el componente más importante. Sin embargo, nuestro problema era encontrar una forma para distinguir las dos especies, no encontrar un límite que mantenga seguros a los biólogos. Así que, necesitamos revisar nuestro enfoque.

Los estudiantes pueden hacer una corrección al modelo de la línea media, $y = 0.5185x + 0.350$. Ellos pueden argumentar que, dado que hay más mosquitos *Af* que *Apf* en la colección, una mayor parte de la región entre las líneas ajustadas $y = 0.479x + 0.549$ (*Af*) y, $y = 0.558x + 0.151$ (*Apf*) debe ser asignada a la población más grande. Dado que *Apf* representa tres quintos de los insectos capturados, debe recibir tres quintos del área. Un mejor enfoque sería ponderar la combinación lineal de acuerdo con la variabilidad de las dos muestras. Esta solución en cuanto al tamaño de muestra toma un enfoque diferente.

ITERAR SEGÚN SEA NECESARIO PARA REFINAR Y EXTENDER EL MODELO

Observando el diagrama de dispersión, notamos que el mosquito *Apf* tiende a tener alas ligeramente más largas y antenas ligeramente más cortas que el mosquito *Af*. Dicha ocurrencia puede sugerir que la razón de la *Longitud de la Antena* y la *Longitud del Ala* puede ser útil.

Las razones de la *Longitud de la Antena* y la *Longitud del Ala* son:

AF	0.721	0.841	0.782	0.824	0.758	0.813	0.726	0.846	0.75
APF	0.640	0.645	0.663	0.630	0.640	0.602	-	-	-

TABLA C.6: RAZONES DE LA LONGITUD DE LA ANTENA Y EL ALA

La figura C.8 muestra estas razones en una línea numérica.

FIGURA C.8: LÍNEA NUMÉRICA CON LAS RAZONES DE LA LONGITUD DE LA ANTENA Y EL ALA

No existe superposición entre estas razones. La razón más pequeña de un mosquito *Af* es de 0.721 y la más grande para un mosquito *Apf* es de 0.663. En algún punto del intervalo [0.663, 0.721] hay una delimitación que puede ser usada de forma efectiva para distinguir las dos especies de mosquito. ¿Dónde debemos escoger? Si usamos el punto medio, 0.692, como se muestra en la Figura C.9, tenemos un criterio de clasificación que evita el error de clasificación anterior. Si la razón de la longitud de la antena y el ala es mayor a 0.692, se considera al mosquito como *Af*. De lo contrario, se le considera *Apf*. Los estudiantes pueden escoger encontrar las medias o las medianas de este conjunto de razones y buscar el punto medio de las medias o de las medianas en lugar de usar los valores extremos, como se muestra aquí.

ANALIZAR Y EVALUAR EL MODELO Y LA SOLUCIÓN

Si *Antena/Ala* = 0.692, entonces *Antena* = 0.692 • *Ala*, y podemos ver el límite como una línea en el plano.

El límite creado por el modelo de la razón *en el Punto Medio* clasifica a todos los mosquitos conocidos de forma correcta, así que es ciertamente una mejora. Muchos estudiantes estarán satisfechos con la solución y la usarán para clasificar a los tres mosquitos desconocidos. Sin embargo, en la gráfica anterior, parece que el límite es más cercano a los mosquitos *Af* que a los *Apf*. Dada la amplia variación entre los mosquitos *Af*, esto sugiere que el modelo de la razón *en el Punto Medio* no toma en cuenta de forma efectiva la diferente variabilidad de los dos tipos de mosquitos que notamos anteriormente. Ahora tenemos un modelo funcional; tal vez podamos mejorarlo.

Las mejoras que traten los estudiantes dependen de qué matemáticas conocen. Si han estudiado estadística, tienen opciones que no estarían disponibles para los estudiantes que no la han estudiado. Es muy posible que la solución anterior sea el mejor modelo que los estudiantes puedan crear. La siguiente variación asume algo de experiencia con modelos estadísticos.

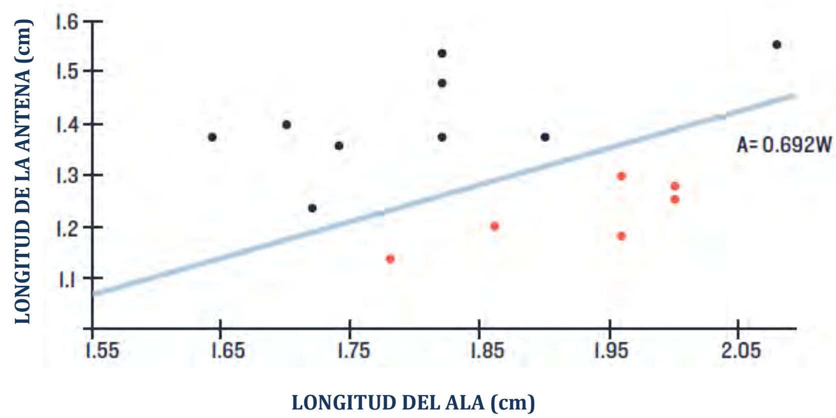


FIGURA C.9: LA RAZÓN DEL PUNTO MEDIO.

REPETIR CUANTO SEA NECESARIO PARA REFINAR Y EXTENDER EL MODELO

Un modelo modificado de la razón: el enfoque de la puntuación Z. Con la tecnología, los estudiantes pueden fácilmente calcular la media y la desviación estándar de los dos conjuntos de razones. Para los mosquitos *Af*, la media de la razón es 0.785 y la desviación estándar es 0.048, mientras que para las razones *Apf* la media es 0.637 y la desviación estándar es 0.020. Notamos que las razones *Af* están más dispersos que las de *Apf*. Podemos estandarizar las razones al transformarlas en sus correspondientes *puntuaciones Z*. Una puntuación tipificada es calculada como

$$z = \frac{observación - media}{desviación\ estándar}$$

Ésta es una medida de distancia de la observación de la media, medida en unidades de desviación estándar. Entre más grande, o pequeña para valores *Z* negativos, sea la puntuación tipificada, más distante de la media se encuentra la observación. Dado que la puntuación Z está basada en la desviación estándar, podemos incluir las diferencias observadas en la variabilidad entre las dos especies de mosquitos al comparar sus *puntuaciones tipificadas*.

Nota: dado que no sabemos nada sobre la normalidad de las distribuciones, no podemos realizar ninguna afirmación acerca de las probabilidades, pero podemos hacer comparaciones. Un mosquito *Af* con una razón de 0.05 unidades menos que el promedio tiene una puntuación Z de

$$z = \frac{-0.05}{0.048} = -1.04$$

Y está a un poco más de una desviación estándar de la media. Un mosquito *Apf* con una razón de 0.04 por encima del promedio para estos mosquitos tiene una puntuación tipificada de

$$z = \frac{0.04}{0.02} = 2$$

Así que incluso si las razones de los mosquitos *Apf* están más cerca del promedio, es un mosquito más inusual para su especie ya que está a dos desviaciones estándar de la media.

Los estudiantes que vienen de una experiencia matemática de una escuela secundaria que usa los Estándares Estatales Comunes (CCSSM) pueden usar la desviación media absoluta en lugar de la desviación estándar. La desviación media absoluta para *Af* es 0.0368 y para *Apf* es 0.0137.

HACER SUPOSICIONES APROPIADAS Y DEFINIR LAS VARIABLES ESENCIALES

Así que, podemos definir una medida de rareza con la puntuación tipificada, si dos mosquitos tienen la misma puntuación, entonces son igualmente raros para sus respectivas poblaciones.

HACER LOS CÁLCULOS: ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN

Considerar las puntuaciones tipificadas nos permite encontrar la razón, r*, para que las puntuaciones sean iguales. Dos mosquitos que se encuentren en esta categoría son considerados igual de raros en sus respectivas distribuciones. Al resolver

$$\frac{r* - 0.637}{0.02} = \frac{0.785 - r*}{0.048}$$

Encontramos que r* = 0.6805. Nuestro modelo de razón sugiere que una razón *Antena*/*Ala* mayor que 0.6805 debe ser clasificada como de un mosquito *Af* mientras que una razón *Antena*/*Ala* menor que 0.6805 debe ser clasificada como de un mosquito *Apf*.

ANALIZAR Y EVALUAR EL MODELO Y LA SOLUCIÓN

Si la razón *Antena*/*Ala* = 0.692 es usada como una delimitación en la línea numérica, entonces la ecuación *Antena* = 0.692 • *Ala* es un límite equivalente en el plano. Si una observación cae en la delimitación, por seguridad, lo clasificamos como *Apf* y lo consideramos peligroso. Esta delimitación lineal parece ser una mejor opción que la de la razón del punto medio (Figuras C.10 y C.11), dado que este nuevo límite reconoce y toma en cuenta la mayor variación de la población *Af*.

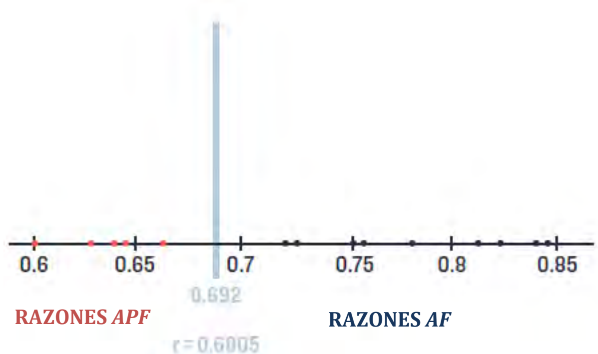


FIGURA C.10: LÍMITE UNIDIMENSIONAL r* = 0.6805

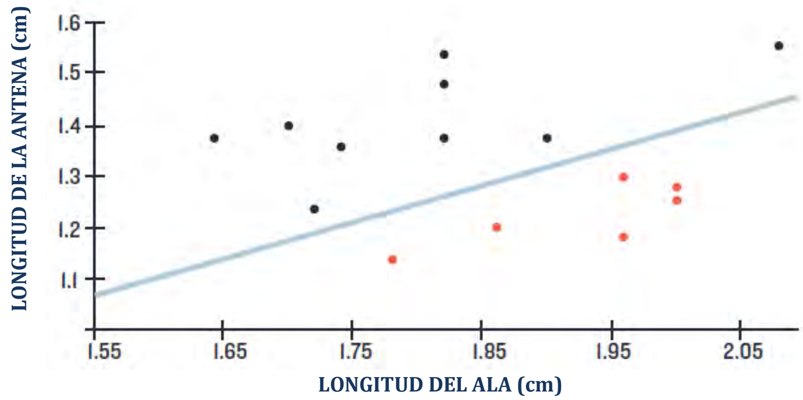


FIGURA C.11: GRÁFICA BIDIMENSIONAL, A = 0.6805 W, DONDE A = ANTENA Y W = ALA

ANALIZAR Y EVALUAR EL MODELO Y LA SOLUCIÓN

Un método natural para probar el modelo es remover los valores de algunos mosquitos, recalcular el límite de acuerdo con el proceso descrito y observar si el proceso clasifica correctamente a los mosquitos que fueron eliminados. Si un método no clasifica de forma precisa al mosquito eliminado, es, entonces, un poco débil. Si cada mosquito es quitado, uno a la vez, y el límite es recalculado usando nuestro proceso equi–inusual con los mosquitos restantes, en cada caso, el método predice con precisión el tipo del mosquito que ha sido eliminado. En cada caso, la pendiente de la línea que define el límite cambia solo ligeramente.

IMPLEMENTAR EL MODELO Y REPORTAR LOS RESULTADOS

Usando el modelo Equi–Inusual de la Razón, clasificaremos cualquier mosquito con una razón antena/ala mayor a 0.6805 como *Af.* Aquellos con una razón menor a 0.6805 deben ser considerados como *Apf.*

Con este límite podemos clasificar a los tres mosquitos desconocidos:

- El mosquito desconocido (1.80, 1.24) tiene una razón de 0.689 y es clasificado como *Af.*
- El mosquito desconocido (1.84, 1.28) tiene una razón de 0.696 y es clasificado como *Af.*
- El mosquito desconocido (2.04, 1.40) tiene una razón de 0.686 y es clasificado como *Af.*

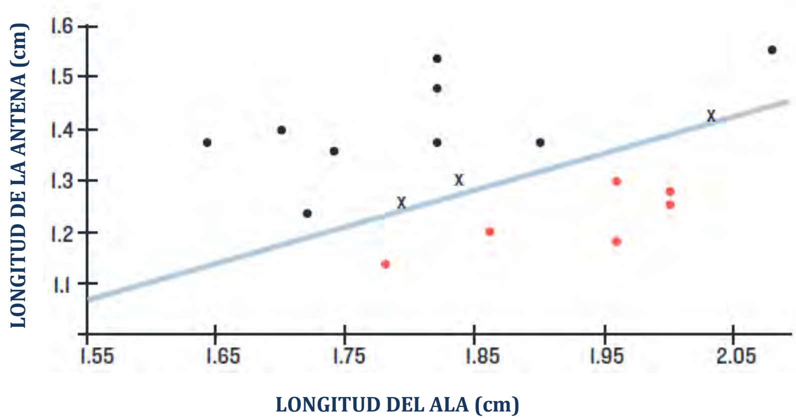


FIGURA C.12: CLASIFICACIÓN DE LOS TRES MOSQUITOS DESCONOCIDOS

En cada iteración del proceso de modelación, un modelo fue desarrollado y evaluado. Han sido añadidas suposiciones que fueron usadas para refinar y mejorar el modelo donde fue requerido. Algunos modelos fueron abandonados, mientras que otros fueron extendidos. El último modelo fue evaluado y, aunque tuvo limitaciones como todos los modelos, se encontró que era satisfactorio y que puede servir hasta que más información sea obtenida y el modelo sea mejorado una vez más.

DISTRIBUCIÓN JUSTA DE FONDOS DE APOYO PARA SITUACIONES DE DESASTRE

INTRODUCCIÓN

Por desgracia, los desastres naturales e industriales ocurren con alarmante regularidad. Hay huracanes, sismos, inundaciones, tornados, accidentes industriales, accidentes aéreos, etc. Estos eventos causan a los individuos la pérdida de propiedades, sufrimiento personal y a veces, hasta la pérdida de vidas.

Tras una tormenta, como la de un huracán, gobiernos locales y nacionales, u organizaciones privadas, pueden reservar un fondo de dinero, o ropa, tiendas, comida, etc., para ayudar a que las personas o las comunidades afectadas por la tormenta reconstruyan o lidien con sus pérdidas. Típicamente, el fondo consiste en dinero apartado para aminorar el desastre. Sin embargo, comúnmente el tamaño del fondo no es suficiente para cubrir todas las peticiones legítimas que son hechas contra la suma de dinero asignado para tratar de aliviar el sufrimiento.

SITUACIÓN DE MODELACIÓN GENERAL

Un desastre natural, por ejemplo, un huracán, ha causado grandes daños en un área localizada. Un fondo monetario especial de tamaño F ha sido creado para el beneficio de aquellos que han sufrido pérdidas debido al desastre. Supón que peticiones honestas de tamaño C_1, C_2, ..., C_r por parte de los solicitantes 1, 2, ..., r han sido recibidas por el administrador a cargo de distribuir el dinero del fondo especial. Se usan números para indicar los nombres de los solicitantes y C_i es la cantidad requerida por el solicitante i. Desafortunadamente, el monto total de las peticiones es mayor que la cantidad disponible F para cubrir las peticiones, así que $C_1+ C_2,+... +C_r > F.$

> ***Tarea:*** Crea un sistema justo para que el administrador del fondo distribuya la cantidad F a los solicitantes
>
> ***Nota:*** Una variedad de casos específicos para este tipo de problema se dan en la siguiente sección. Estos casos no solo pondrán a prueba tu tentativa de tratar a los solicitantes justamente, sino que probarán tu capacidad de desarrollar un modelo con peticiones de valores específicos.

Cuestiones para que tú, como modelador, tomes en cuenta:

- Los solicitantes en diferentes escenarios pueden ser una sola persona, una familia o toda una ciudad.
- Los solicitantes pueden ser ricos o pobres o, si son ciudades, pueden estar relacionados a diferentes dimensiones en términos de riqueza, prosperidad económica, área física o población.
- El tamaño de las peticiones en los casos de prueba para tu modelo son enlistadas meramente como números. Por ende, no puedes decir a partir del número 6 si se trata de

USD 600,000 o 6 millones o 60. ¿Tu perspectiva de lo que constituye justicia cambia con una escala alterada de la cantidad de dinero implicado en las peticiones?

– Cuando se otorga ayuda del fondo a un solicitante i, al evaluar cómo valorar lo que el solicitante ha recibido, éste puede pensar en términos de lo que ha recibido, por ejemplo, ganancia, o puede prestar atención a aquello que perdió. ¿La perspectiva de ganancia versus pérdida en la forma en que las peticiones son resueltas cambia tu forma de pensar sobre lo que es justo?
– ¿Puedes pensar en otras situaciones donde haya un bien divisible o "patrimonio" P y las peticiones contra P excedan el valor de P? ¿Cómo estas otras situaciones se asemejan a la distribución de fondos de apoyo al desastre y cómo se diferencian?

CASOS PARA LOS ESTUDIANTES

La única información que tienes disponible es:

- Patrimonio $P = 210$ con 2 solicitantes:
  > A solicita 60
  > B solicita 210

  Supón, que ahora $P = 40$ y que las peticiones son las mismas.

- Patrimonio $P = 100$ con cuatro peticiones:
  > A solicita 40
  > B solicita 40
  > C solicita 60
  > D solicita 160

  Supón, que ahora $P = 150$, $P = 210$ y $P = 280$ y que las peticiones son las mismas en cada caso.

- Patrimonio $P = 300$ con cuatro peticiones
  > A solicita 10
  > B solicita 20
  > C solicita 30
  > D solicita 440

  Supón, que ahora $P = 40$ y $P = 400$ y que las peticiones son las mismas.

PARA LOS DOCENTES

Mostramos aquí algunas formas para conducir a los estudiantes hacia ciertas ideas usadas para resolver problemas de este tipo. Esta clase particular de problemas es conocida como problemas de bancarrota. Una versión de la resolución de estas cuestiones es cuando una firma se declara en bancarrota con un patrimonio remanente P, pero las demandas de los acreedores en contra de estos bienes exceden P. La razón por la que P es con frecuencia usado en problemas de bancarrota es que, en otros escenarios derivados de este problema, tenemos un patrimonio P y las peticiones en contra de éste son más grandes que la cantidad de dinero disponible.

Patrimonio de entidades (Regla de ganancias igualitarias): Un enfoque puede ser a través de la afirmación de que cada solicitante debe ser tratado como una entidad y que solo debe dividirse la cantidad P equitativamente entre todos los solicitantes. Éste es el enfoque usado al dar a cada estado de los EUA dos asientos en el Senado, sin importar qué tan grande o pequeña sea su población o su área. Cada estado es tratado equitativamente.

Sin embargo, este enfoque en algunas instancias particulares de los problemas de bancarrota permite la posibilidad de que a un solicitante se le dé más de lo que pide. Esto puede parecer bien para algunos estudiantes, pero poco razonable para otros. Entonces, se puede modificar la equidad de entidades para igualar lo que se le da a cada solicitante lo mejor posible, sin darle a ninguno de ellos más de lo que está pidiendo. Esta aproximación de ganancias igualitarias restringida fue sugerida por el filósofo andaluz Maimónides, (España, 1138 – Egipto, 1204), durante la Edad Media cuando los académicos Talmúdicos trataban de resolver variados problemas hipotéticos de bancarrota.

Enfrentándose con la idea de equidad de entidades desde el punto de vista de la ganancia, se puede sugerir la división equitativa de la pérdida como una perspectiva alternativa. ¿Cuál es la pérdida colectiva de los solicitantes? La pérdida L = *Solicitudes totales* – P. La forma en la que las pérdidas son distribuidas entre los solicitantes puede llamar la atención al hacer la consideración de si ha ocurrido un resultado justo.

La analogía a la regla de ganancias igualitarias sugiere que haya un método en el que cada participante reciba cantidades iguales de pérdida. Esto, sin embargo, no siempre es posible sin que algunos participantes sumen su propio dinero al patrimonio P y, así como darles a las personas más de lo que piden será rechazado por muchos, de igual forma lo será pedirles a algunos solicitantes que subsidien la compensación. Sin embargo, así como se puede tener un enfoque de ganancias igualitarias como se menciona anteriormente, de igual forma se pueden tener pérdidas igualitarias, sin necesidad de subsidiar, siendo este sistema también mencionado por Maimónides. Reiterando, la idea es igualar la pérdida tanto como sea posible entre los solicitantes hasta que la cantidad P sea consumida y sin agrandar el patrimonio con las contribuciones de los mismos solicitantes para alcanzar la equidad total de la pérdida.

Un aspecto atractivo del método que trata de pérdidas igualitarias de los solicitantes es que lleva, de forma natural, al tema algebraico estándar de resolver dos ecuaciones con dos incógnitas.

Considere este problema:

Ejemplo 1: Supón que P (bienes remanentes con los que se resuelven peticiones) = USD 210

El solicitante A tiene una petición verificada de USD 60

El solicitante B tiene una petición verificada de USD 300

Si le damos a A, a unidades y a B, b unidades, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$a + b = 210$$
$$60 - a = 300 - b$$

Al despejarlas, encontramos que $b = 225$ y $a = -15$

¡Ups! ¿Qué significa ese -15? La única forma de igualar la pérdida total es que A agregue USD 15 al patrimonio, por lo que la pérdida de A sería 60 + 15 = 75, igual a la de B, 300 – 225 = 75.

Si no estamos satisfechos con este enfoque, podemos usar la regla de pérdidas igualitarias de Maimónides, lo que significa que tratamos de hacer que las pérdidas de A y B sean tan equitativas como sea posible. Por ende, si le damos a B las 210 unidades totales de P, hacemos que la pérdida de A en este punto sea de 60 unidades y la de B de 90 unidades. Sin que A

subsidie el valor de P con más unidades, no hay forma de hacer que las pérdidas de ambos sean iguales, por lo que la regla de pérdidas igualitarias de Maimónides le da nada a A (0 unidades) y todo a B (210 unidades).

Puede parecer como si al resolver los problemas de optimización restringida involucrados en la pérdida y la ganancia igualitaria de Maimónides, siempre se tuviera que trabajar con ecuaciones o desigualdades al tratar de igualar pérdidas, como se indica arriba. Sin embargo, hay un método visual y elegante que simplifica ampliamente el razonamiento de estos dos métodos para abordar algoritmos de justicia en problemas de bancarrota.

Pensar en el patrimonio como un fluido homogéneo de color, azul en nuestros diagramas, y las peticiones como contenedores de vidrio cuya altura son las mismas solicitudes. Imaginamos que tenemos un sistema para llenar los contenedores que representa las peticiones con el fluido, en el que el llenado se detiene cuando se alcanza el tope del contenedor de una petición.

El orden el que se enlistan los contenedores es, de alguna forma, un asunto de discreción. Aquí (Figura C.13) hemos llenado los contenedores de las peticiones equitativamente con una pequeña cantidad de fluido. Continuamos llenando los dos contenedores equitativamente hasta que la petición más pequeña sea completada, al alcanzar la altura del contenedor de la petición.

En este punto, (Figura C.14), hemos llenado ambos contenedores a una altura de 60. Dado que hay dos contenedores llenados a esta altura, hemos usado 120 unidades del patrimonio, representado como fluido. Así que tenemos 210 – 120 = 90 unidades de fluido restante. Esto nos permite continuar llenando el contenedor que representa la petición de 300 hasta la altura de 150 (Figura C.15). Hemos usado el valor total de P, dado que 150 + 60 = 210. Note que los diagramas son simbólicos y no tienen que ser métricamente precisos para realizar los cálculos aritméticos que resuelven el problema.

Los mismos contenedores pueden ser usados mentalmente para resolver problemas de pérdidas igualitarias. Desafiando las leyes de la gravedad, necesitamos reducir la pérdida de la petición más grande a la pérdida de la petición que le sigue para tratar de igualarlas, si es posible. En este ejemplo antigravitatorio, si empezamos llenando el contenedor de 300 desde arriba, podemos poner 210 unidades de fluido, es decir todo el patrimonio, antes de llegar al tope de la otra petición, cuyo contenedor tiene una altura de 60. Por ende, para tratar de igualar las peticiones, todo el patrimonio P de 210 debe de ser dado a B, con 0 para el solicitante A.

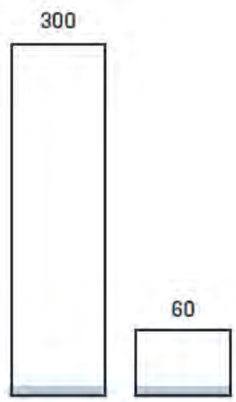


FIGURA C. 13: CANTIDADES PEQUEÑAS E IGUALES HAN SIDO DISTRIBUIDAS A LOS DOS SOLICITANTES.

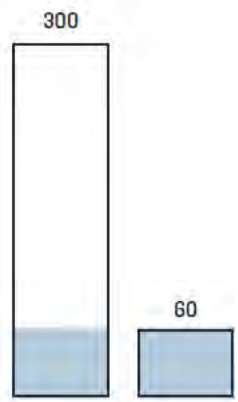


FIGURA C.14: LA PETICIÓN DE 60 HA SIDO SATISFECHA.

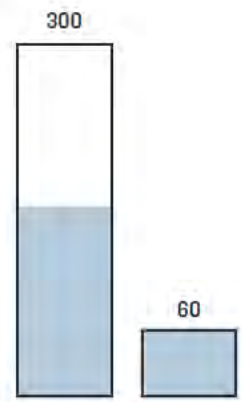


FIGURA C.15: EL PATRIMONIO HA SIDO DISTRIBUIDO TAN EQUITATIVA-MENTE COMO ES POSIBLE.

ENFOQUES PROPORCIONALES

Otro enfoque inventado frecuentemente por los estudiantes es el siguiente: asignar a cada solicitante una cantidad proporcional al tamaño de su petición.

De hecho, la idea de este enfoque es a veces provocada debido a que, cuando se discute cómo el Senado de los EUA trata a todos los estados por igual, surge en los estudiantes la idea de que se les dé a los estados un número de puestos proporcional a su población en la Cámara de Representantes. Dado que a los estados no se les puede asignar una fracción de puesto, el problema de la equidad al diseñar una forma justa de dar puestos a los estados en la Cámara de Representantes tiene diferentes ramificaciones comparado con el problema de bancarrota y es conocido como problema de prorrateo. El problema del prorrateo de la Cámara de Representantes tiene el requerimiento constitucional adicional de que cada estado tenga al menos un puesto. Hay otros problemas de prorrateo interesantes, por ejemplo, al asignar puestos para los partidos en los parlamentos europeos en proporción a los votos que estos tengan en las elecciones. Para los problemas de bancarrota, hay métodos donde el solicitante no recibe ninguna parte de P.

En vista de la discusión anterior, se puede también asignar a cada solicitante una cantidad calculada distribuyendo, primeramente, la pérdida total de manera proporcional, basándose en las peticiones y después, dando a los solicitantes lo que se merecen a partir de esta perspectiva. Al usar un poco de álgebra, es posible ver que estos dos enfoques aparentemente diferentes dan, de hecho, a cada solicitante, la misma cantidad de P.

Existen otros dos enfoques para el método proporcional de asignación de partes de P a los solicitantes. Uno de estos está basado en la siguiente idea. Dado que P no es suficiente para compensar a los solicitantes, ¿por qué no invertir el patrimonio P hasta que éste crezca al total solicitado con la tasa de interés actual, para después distribuir las cantidades necesarias para compensar a los solicitantes? Sin embargo, esto implicaría que los solicitantes tengan que esperar tal vez mucho tiempo por su dinero. Así que, después de calcular la cantidad de tiempo que le toma a P crecer hasta la cantidad total solicitada, se calcula el valor presente de aquellas peticiones futuras. No es difícil ver que estos valores presentes asignarían a cada solicitante una solución proporcional.

Otra forma de ver la solución proporcional sería decir que, dado que no podemos compensar a los solicitantes en su totalidad, ¿qué tal si le damos a cada solicitante c unidades por cada unidad de reclamación que haya solicitado, donde c sea menor que una unidad de reclamación? Esto puede ser razonado como darle a cada solicitante c centavos por cada dólar de una petición monetaria. No es difícil de ver, usando un poco de álgebra, que este enfoque también da lugar a una solución proporcional.

Note que cuando la proporcionalidad es usada, a ningún solicitante se le da nunca el total de su petición. Sin embargo, con algunos de los métodos de justicia mencionados anteriormente, algunos solicitantes obtendrían todo lo que solicitan y otros no. Esto molesta a algunas personas, pero otras sienten que es lo que la justicia requiere.

Resumiendo, hemos observado hasta ahora 6 formas diferentes de razonar la solución de los problemas de bancarrota:

- Equidad de entidades para ganancia
- Equidad de entidades para pérdida
- Ganancia de Maimónides (ganancias igualitarias)
- Pérdida de Maimónides (pérdidas igualitarias)
- Ganancias proporcionales
- Pérdidas proporcionales

¡Pero existen otras ideas!

Suponga que se escoge un orden de peticiones de forma aleatoria y, por lo tanto, sin dar ninguna ventaja a ningún solicitante, y se distribuye la cantidad P como sigue.

- Empezando con la primera petición de la ordenación, se le da a ese solicitante todo lo que pide o, si excede la cantidad P, se le da todo P.
- Si hay más dinero disponible, entonces: se repite el proceso con la segunda persona de la ordenación.

Este enfoque es repetido hasta que P sea distribuido totalmente.

Sin embargo, aunque parezca imparcial usar un enfoque aleatorio, muchos encuentran este enfoque poco atractivo. Pero, aquí germina una idea que restaura la justicia en la mente de algunas personas. Considere todos los órdenes de distribución del patrimonio P a los solicitantes como se hizo anteriormente, es decir, reparta el dinero en el orden en que los solicitantes aparecen en un orden dado de las $r!$ ordenaciones y después, tome la media de las cantidades que cada solicitante obtiene a lo largo de todas las ordenaciones $r!$ posibles, o sea r solicitantes y $r!$ ordenaciones.

La solución, que aparece en varias formas en partes diferentes de la teoría de juego, es conocida como el Valor de Shapley y es parte de las razones por las que Lloyd Shapley ganó el premio Nóbel en Economía en 2012 (compartiéndolo con el teórico del juego Alvin Roth).

Como los variados, diferentes y atractivos métodos que pueden ser usados para decidir una elección usando boletas ordenadas, hemos visto hasta ahora una variedad de formas para resolver problemas de bancarrota. Cuando los estudiantes modelan problemas de bancarrota, ¿cuántos solicitantes es sensato tener en casos particulares que los estudiantes deban considerar? Aunque el realismo requiere que los problemas tengan un número razonablemente grande de solicitantes y, ciertos aspectos de los diversos métodos de distribución de P parecen ser más razonables cuando hay muchas peticiones, hay una idea de la modelación educativa en donde se trabaja con casos más simples que el problema real a tratar para lograr una mayor comprensión. En problemas de bancarrota hay otra razón para observar el caso de dos solicitantes que es muy atrayente y que no tiene una contraparte natural en problemas de bancarrota con más de dos solicitantes.

Describiremos un método para resolver un problema de dos solicitantes que aparece en discusiones de problemas de bancarrota de la Edad Media y que, al menos nosotros, ¡no lo hubiéramos pensado ni en un millón de años!

Ilustremos esto con un ejemplo que, como en los casos anteriores, usará las letras A, B, etc., para los nombres de los solicitantes y el tamaño de las peticiones y las letras a, b, etc., para las cantidades que un método determinado les designe a los solicitantes. Como es usual, P denotará el tamaño del patrimonio y no se usarán ejemplos con más de 4 solicitantes. También, por conveniencia, se enlistarán las peticiones en orden de tamaño no decreciente.

$P = 200$, con peticiones A de 120 y B de 180

Aquí se muestra cómo algunos académicos atacaron este problema en la Edad Media:

Suponga que A es llevada por el solicitante a la persona que administra las 200 unidades de un patrimonio y dice: "Mire, solo hay dos solicitantes, yo, A, y B. B solo pide 180, así que al menos 20 unidades del patrimonio deben ser míos". Esta cantidad, 20, es denominada como la petición no impugnada de A en contra de B. Para algunos valores de las peticiones de A y B, B no puede generar un argumento similar, dado que A está pidiendo todo el patrimonio o más, pero en este ejemplo, B tiene un argumento similar.

El solicitante B puede acudir al administrador que reparte el patrimonio P y decirle: "A solo está pidiendo 120, así que al menos 80 unidades del patrimonio deben ser mías". Así que la petición no impugnada de B en contra de A es de 80 unidades. Ahora, tanto a A como a B se les dan sus peticiones no impugnadas, que suman 100 unidades. Esto significa que 100 unidades todavía deben ser distribuidas (200 – 100). Dado que la cantidad remanente (100) está siendo disputada tanto por A como por B, el administrador la divide de forma equitativa entre A y B, de modo que A obtiene $20 + 100/2 = 70$ y B, $80 + 100/2 = 130$. Para confirmar, $70 + 130$ es igual al tamaño del patrimonio P de 200. Note que no es totalmente obvio que siempre habrá fondos adicionales para distribuir después de que las peticiones no impugnadas son satisfechas, pero siempre los habrá.

Este procedimiento es llamado algunas veces la regla talmúdica, a veces la regla de la prenda en disputa y otras veces, conceder y dividir. El uso del término de regla de la prenda en disputa para describir este método viene de problemas planteados cuando dos solicitantes se disputan una sola prenda. Pero los problemas de bancarrota son con frecuencia planteados en situaciones donde la subdivisión del patrimonio P involucra distribuir algo que es homogéneo e infinitamente divisible. Hablando de forma estricta, el dinero no es infinitamente divisible porque existe la unidad más pequeña de una moneda, como en EUA, el céntimo. Sin embargo, el valor de una prenda es destruido cuando es subdividida para dar sus partes a los solicitantes. Los problemas de bancarrota están usualmente planteados en términos de la distribución de algo cuyo valor no se destruye cuando el bien es subdividido, como sería el caso de una prenda, pintura u otros tipos de bienes que pueden pertenecer a un patrimonio. Por lo tanto, en la literatura de bancarrota reciente el método llamado regla de la prenda en disputa es ahora frecuentemente denominado como el principio de conceder y dividir.

El interés reciente por analizar problemas de bancarrota fue motivado por un artículo escrito por el académico en ciencias políticas Barry O'Neil. El problema incitó a Michael Maschler y Robert Aumann a realizar trabajo seminal sobre el problema. O'Neil atrajo la atención hacia un problema descrito en el Talmud Babilónico resumido en la tabla que se presenta a continuación, que muestra las soluciones de tres diferentes problemas de bancarrota con 3 solicitantes.

Las entradas en el cuerpo de la tabla representan las soluciones que corresponden a tamaños de patrimonio de 100, 200 y 300. El renglón superior parece una división equitativa mientras que el inferior parece proporcional, pero el reglón de números del medio es confuso. Aumann y Maschler mostraron que había un método, ahora llamado la regla talmúdica, que explicaría las tres líneas.

PETICIÓN

PATRIMONIO	100	200	300
100	33 1/3	33 1/3	33 1/3
200	50	75	75
300	50	100	100

TABLA C.7: TRES PROBLEMAS DE BANCARROTA DESCRITOS EN EL TALMUD

Lo que Aumann y Maschler hicieron constituye una historia de detectives matemáticos, la cual es interesante por su propio mérito y puede ser encontrada en Malkevitch (2005), pero aquí solo describiremos el ingenioso algoritmo que encontraron para explicar los números en la Tabla C.7. El método puede ser aplicado a cualquiera de las líneas de la tabla, pero solo mostraremos cómo se aplica al confuso segundo renglón.

La idea básica es dividir las peticiones de todos los solicitantes en dos, para obtener "peticiones a la mitad" para todos. Primero, hay que tomar la primera colección de peticiones a la mitad y usar el patrimonio P para satisfacerlas usando el método de ganancias igualitarias de Maimónides. Si hay dinero sobrante, se usa para satisfacer otra colección de peticiones a la mitad usando el método de pérdidas igualitarias de Maimónides.

Hasta el momento, para un patrimonio de tamaño 200 (Tabla C.7, segunda línea), las peticiones a la mitad de A, B y C son 50, 100 y 150.

Aplicando las ganancias igualitarias de Maimónides, tratamos de darle a A, B y C cantidades tan iguales como sea posible, pero sin exceder sus peticiones. Así que le damos a A, B y C, USD 50 a cada uno, habiendo distribuido hasta este momento 150 de las 200 unidades disponibles. Ahora continuamos tratando a B y C equitativamente, dándole a cada uno 25 unidades adicionales, lo que da a A, 50 unidades, y 75 tanto a B como a C, lo que agota el patrimonio P y finaliza el ejercicio. Sin embargo, comúnmente se puede tener un monto suficiente en el patrimonio para que después de que las primeras demandas hayan sido satisfechas usando la ganancia igualitaria de Maimónides, se trabaje en la segunda línea de peticiones a la mitad usando las perdidas igualitarias de Maimónides.

Cuando el método de Aumman y Maschler, llamémosle la regla talmúdica, es aplicado al caso de 3 o más solicitantes, satisface una propiedad notable llamada consistencia. Suponga que se observa un subconjunto T de al menos 2 solicitantes, pero no la colección entera de estos. Suponga que la regla talmúdica asigna a T una cantidad P^*. Entonces, la regla talmúdica, cuando se usa para satisfacer peticiones del mismo tamaño, pero usando P^* en lugar de P, distribuye la cantidad P^* a los miembros de T con exactamente las mismas cantidades como en la solución original.

En particular, si T tiene exactamente 2 miembros, entonces las cantidades distribuidas son las que se darían con el método de conceder y dividir, o sea la regla de la prenda disputada.

Para ilustrar la idea de consistencia, considere la Solución Talmúdica para un patrimonio de 200, el segundo renglón de la Tabla C.7. Las cantidades asignadas en este caso son $A = 50$, $B = 75$, $C = 75$.

Para comprobar la consistencia en este ejemplo, se requiere que se verifiquen tres casos:

- $P^* = 125$, para las peticiones A = 100 and $B = 200$
- $P^* = 125$ para las peticiones A = 100 and $C = 300$
- $P^* = 150$ para las peticiones B = 200 and $C = 300$

Para el primer caso, A no tiene peticiones no impugnadas contra B, pero B tiene 25 unidades de petición no impugnada contra A. Así que se le dan 25 unidades a B y se divide la petición impugnada restante de 100 equitativamente. A recibe 50 y B recibe 75, las mismas cantidades que se asignaron originalmente.

Para el segundo caso, A no tiene peticiones impugnadas contra C, pero C tiene 25 unidades de petición no impugnada contra A. Así que se le dan 25 unidades a C y se dividen las 100 restantes equitativamente. A recibe 50 y C recibe 75, las mismas cantidades que se asignaron originalmente.

Para el último caso, ni B ni C tienen peticiones no impugnadas entre ellos, así que el patrimonio de 150 se divide equitativamente. Tanto B como C obtienen 75, las mismas cantidades que se asignaron originalmente.

La consistencia parece ser una condición fuerte y es notable que la regla talmúdica, con su balance en la atención entre ganancias y pérdidas, satisface esta condición.

Muchos “axiomas de justicia” han sido propuestos para que sean seguidos por métodos interesantes para resolver problemas de bancarrota. Por ejemplo, si el patrimonio va de P a una cantidad que sea más grande y las peticiones permanecen iguales, entonces ningún solicitante debería obtener una cantidad más pequeña cuando el método es aplicado usando la nueva cantidad en lugar de P. Si dos problemas de bancarrota difieren solamente en que una de las peticiones de los solicitantes ha subido, entonces un método razonable será no darle a ese solicitante menos que cuando la petición era más pequeña. Los investigadores de problemas de bancarrota han trabajado para determinar cuáles métodos obedecen a cuáles reglas de justicia e, idealmente, para ser capaces de decir que, si se requiere que se respete un conjunto particular de reglas, entonces solo un método específico puede ser usado.

En años recientes, mucho del esfuerzo por entender el problema de la bancarrota ha sido realizado por William Thomson, un economista matemático que enseña en el Departamento de Economía de la Universidad de Rochester. La extensa investigación de Thomson y sus estudiantes ha elucidado una notable y rica colección de métodos que resuelven problemas de bancarrota y los axiomas de justicia a los que obedecen. El estudio reciente de Thomson (2015) es un tesoro oculto de resultados e ideas fascinantes.

Los problemas de bancarrota no son más que una amplia selección de problemas de justicia que pueden ser modelados por estudiantes de preescolar a doceavo grado. Otros incluyen los temas de elecciones, distribución, asignación de costos y votos ponderados. Notablemente, como en el modelo realizado anteriormente, aunque la teoría puede involucrar trabajo mucho más allá de lo que puede ser hecho de preescolar a doceavo grado, ¡los algoritmos involucran muchas veces poco más que aritmética y álgebra! Para lecturas adicionales sobre estos y otros problemas de justicia, vea la lista para el Apéndice C en la sección de Referencias.

MANEJANDO POR COMBUSTIBLE

INTRODUCCIÓN

Esta investigación es adecuada para ser usada como una primera actividad de modelación con estudiantes en clases a nivel de álgebra o introducción al cálculo. Es un problema especialmente bueno para los estudiantes que apenas están tramitando su licencia de conducir, dado que tienen un gran interés en sus soluciones. Adicionalmente, datos relevantes se encuentran disponibles en internet a través de sitios como “GasBuddy”, un sitio del internet donde se puede encontrar el precio de combustible en los Estados Unidos, Canadá y Australia. Dada la familiaridad con el contexto, los estudiantes pueden rápidamente identificar cantidades relevantes de interés y suposiciones razonablemente simplificadas sin la asistencia del docente, y llevar a cabo análisis productivos usando nada más que expresiones racionales y funciones lineales.

PRINCIPIO DOCENTE

Con la modelación se trata de tomar decisiones, así como reconocer cuando una decisión es necesaria, cuando tomarla y cuando revisarla. Ayudar a los estudiantes a desarrollar estas habilidades es una meta primaria en la enseñanza de la modelación. Cuando sea posible, deje a los estudiantes “conducir” la discusión, ayudándoles en especial a “reconocer” cómo funciona su propia toma de decisiones.

Principios generales de modelación

- Comúnmente, es más fácil desarrollar modelos útiles al empezar con una versión simplificada de una situación que con una que sea más cercana a la realidad. El primer modelo es raramente el modelo final.

– Preste atención a lo que quiere. Si necesita un número, invente un valor, pero anote lo que hizo. Ese número puede convertirse en una variable posteriormente.
– Sea consciente de las decisiones/suposiciones
– Pregunte, ¿Qué ocurre si? ¿Qué pasaría si (escoja un número o suposición) cambiara?
– Pregunte, ¿Qué cuestión estás tratando de contestar? ¿Cómo puedo medir eso?

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La mayoría de los conductores tienen una región habitual en la que realizan la mayoría de sus movimientos. Sin embargo, los precios del combustible pueden variar ampliamente, de modo que éste puede ser sustancialmente más barato en algún lugar fuera de la región habitual. ¿Sería más económico ir a una estación fuera de la región habitual para comprar combustible? Por lo tanto, la pregunta general que queremos abordar es, ¿cómo podemos determinar qué estación de combustible es más costo-eficiente?

HACER LA PREGUNTA

Primero, necesitamos una pregunta definida más claramente para considerarla. Dado que la respuesta a la pregunta central anterior variará dependiendo de la ubicación y del vehículo, una forma más local del problema puede ayudar a los estudiantes a comenzar. Los estudiantes con experiencia en modelación deben ser capaces de realizar este refinamiento por su cuenta, pero, para los estudiantes nuevos en la modelación, el docente necesitará ayudarles a formular el problema de una forma más manejable y limpia y puede escoger comenzar con la formulación a continuación, en lugar de la que se dio anteriormente. Por ejemplo,

> Manejas a la escuela todos los días. En la ruta que tomas de tu casa a la escuela hay varias estaciones de combustible. Desafortunadamente, los precios en tu ruta son siempre altos. Una amiga te dice que ella compra su combustible en una estación a varios kilómetros fuera de tu ruta normal, donde los precios son más baratos. ¿Será más económico para ti manejar la distancia extra hasta el combustible más barato que comprarlo a lo largo de tu ruta?

Incluso esta versión localizada del problema es abierta. Desde este punto de partida, ¿qué preguntas deben estarse haciendo los estudiantes? ¿Cómo debe el docente apoyarlos a medida que crean un modelo para contestar la pregunta?

CREAR UN EJEMPLO ESPECÍFICO

Siempre motivamos a los estudiantes a comenzar creando ellos mismos una versión pequeña y muy específica del problema. Pedir a los estudiantes que se pongan ellos mismos dentro del escenario y que traten de responder a la pregunta principal por ellos mismos es una buena forma de empezar. El uso de casos especiales ayuda a los estudiantes a aclarar el problema y determinar variables importantes y, con frecuencia, sugiere enfoques que pueden ser útiles en un escenario más general. Hacerlos aplicar la situación en ellos mismos les permite usar lo que saben acerca de su propia ruta como los datos del problema.

También, el docente puede ayudarles a darse cuenta de que su versión personal del problema no tiene que ser la verdadera. Los precios y las distancias pueden ser escogidos para hacer cálculos convenientes, permitiendo que la estructura del problema sea más visible. Adicionalmente, los docentes deben hacer que los estudiantes noten de forma explícita qué cantidades han definido a lo largo del camino. Estas cantidades pueden ser revisadas después dentro del proceso de modelación para convertirse en variables en el modelo más general.

Un ejemplo de un planteamiento del problema personalizado es:

> Supón que hay una estación en tu ruta normal que vende combustible a USD 1 por litro. Una estación a 10 kilómetros fuera de tu ruta vende combustible por USD 0.95 por litro. ¿Deberías viajar la distancia extra para comprar combustible en esa estación?

Los estudiantes que tengan dificultades pueden ser motivados a dibujar un diagrama para ilustrar el problema.

Nota: Un principio de modelación general es que comúnmente es más fácil desarrollar modelos útiles empezando con una versión simplificada de la situación en lugar de una que sea cercana a la realidad.

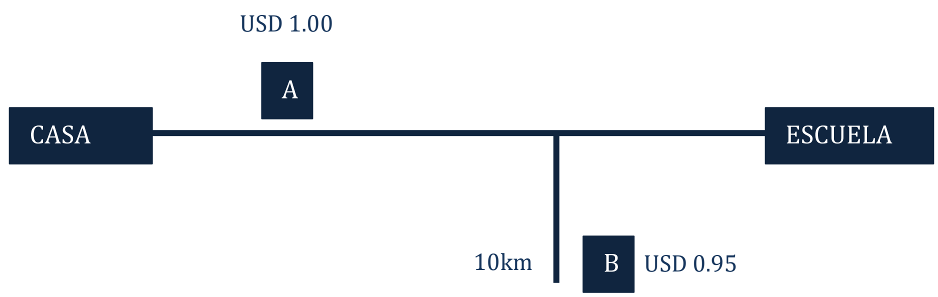


FIGURA C.16: DIAGRAMA QUE ILUSTRA EL PROBLEMA SIMPLIFICADO

El primer modelo es raramente el modelo final. Por ende, el diagrama muestra el viaje a la estación B como perpendicular a la ruta principal, mientras que la configuración del mundo real puede ser diferente.

Basándose en la pregunta central del problema, los estudiantes deben ver que necesitan comparar el costo total de comprar combustible en las dos estaciones. A medida que empiezan a realizar estos cálculos, descubrirán que falta otra cantidad necesaria: la cantidad de combustible a ser adquirida. Como antes, escoger un valor específico permite que el estudiante pueda continuar y proporciona otra variable para el modelo general. Por simplicidad, asumamos que siempre se llena el tanque cuando aún le quedan 15 litros. En vehículos nuevos, una luz se prende para indicar este nivel. Supón que tu vehículo tiene un tanque de 55 litros.

En este punto, los estudiantes pueden calcular el costo de comprar combustible en las dos estaciones. Sin embargo, el planteamiento del problema anterior aún necesita refinamiento antes de que realmente represente la pregunta de interés. Para ayudar a los estudiantes a ver la necesidad de mayor claridad, pregunte, ¿por qué no manejaríamos los 10 km para comprar combustible más barato?

Si cambiamos el problema de modo que el combustible barato esté 100 o 200 km más lejos, los estudiantes verán rápidamente que gastarían cualquier dinero que se hayan ahorrado comprando combustible menos caro al manejar hasta la estación. Esto nos dice que la cantidad de combustible consumido al viajar a la estación es importante dado que no ayuda a ir y venir de la escuela a la casa. El combustible gratis obtenido al límite de nuestro rango usual de manejo no nos da kilómetros útiles.

Dado que el combustible consumido depende de la eficiencia en kilómetros por litro (km/ l) de su carro y la distancia recorrida, tanto los km/ l del vehículo como la distancia serían factores importantes. También sugiere que la respuesta a la pregunta puede ser diferente para dos estudiantes que manejan carros distintos. Para un estudiante que maneja un SUV, con un rendimiento de 4 km/ l sería menos probable que recorra los 20 km (10 km a la estación y 10 km de regreso a la ruta) que para otro que maneja un automóvil pequeño que rinde 12 km/ l.

Nota: Esta discusión resalta la necesidad de la suposición de que solo el dinero y no el tiempo será usado en este modelo de costo inicial.

Esto lleva a un planteamiento más refinado del problema:

> La estación A está en tu ruta normal y vende combustible a USD 1 por litro, mientras que la estación B, que se encuentra a 10 km de tu ruta regular, vende combustible a USD 0.95 por litro. Tu carro rinde 12 km/ l y el de tu amiga, 4 km/ l ¿Alguno de ustedes debería manejar a la estación B por combustible?

¡Ahora tenemos un problema con el que podemos hacer matemáticas interesantes!

Nota: Suponer valores constantes para los precios y las distancias es consistente con la realidad. La suposición implícita aquí de que km/ l es una constante es menos correcta, pero es una suposición perfectamente adecuada para realizar el primer modelo. Asegúrese de que los estudiantes noten esta decisión.

RESOLVER EL PROBLEMA SIMPLE

Como se señala anteriormente, tanto el viaje hacia y desde la estación de combustible representan distancias fuera de la región donde se maneja rutinariamente, así que estos no son kilómetros útiles en desplazamiento diario. Tomando este hecho en cuenta, un modelo típico de un estudiante sería:

Costo total = costo del combustible comprado + costo del viaje adicional por el combustible

(Vea más abajo formulaciones alternas que los estudiantes pueden producir.)

Los estudiantes deben usar su modelo para responder la versión refinada del problema. La discusión que sigue a continuación refleja cómo los estudiantes pueden proceder, y podría ser usada para ayudar a grupos atascados a progresar.

Primero consideremos tu carro. No hay costo por conducir a la Estación A dado que está en tu ruta normal y de todos modos pasas por ella todos los días. Nota: esto representa una suposición que hace al problema más fácil de razonar. Podemos modificar esto último si así lo elegimos. Solo entras y pagas USD 1 por litro para llenar el tanque. Como se señaló antes, qué tanto gastes depende de cuantos galones compres normalmente cuando llenas el tanque, así que el tamaño de tu tanque de combustible es una variable importante.

En la Estación A, se decide poner 40 litros de combustible por un costo total de USD 40. Para la estación B, debes tomar en cuenta que manejas 20 km fuera de tu ruta. Así que debes comprar 40 litros de combustible por el tanque además de una cantidad adicional para reponer por desviarte esos 20 km no contemplados. Entonces, usaste:

$$\frac{20\ km}{12\ km/\mathrm{l}} = \frac{5}{3}$$

de litros de combustible yendo a y regresando desde la estación, así que (40 • 0.95) + (5/3 • 0.95) = 39.58. Puedes ahorrar 42 centavos al manejar a la estación más lejana.

El costo de tu amiga es también de USD 40 en la Estación A, pero el costo para la Estación B se vuelve (40 • 0.95) + (20/4 • 0.95) = 42.75 dado que usó 5 litros en el viaje. No es muy conveniente que tu amiga haga el viaje.

FORMULACIONES ALTERNAS. PROBLEMA SIMPLIFICADO

Al trabajar con las versiones aritméticas de este problema, los estudiantes pueden desarrollar una variedad de modelos simples. Algunos consideran el costo por litro de combustible en lugar del costo por tanque lleno. Se dan cuenta de que no todo el combustible comprado es útil, dado que algo es gastado en el viaje. Por ende, ellos argumentarían:

No hay costo para manejar a la Estación A dado que está en tu ruta normal y de todos modos pasas por ella todos los días. Solo llegas y pagas USD 1/litro para llenar el tanque. Pones 40 litros de combustible con un costo total de USD 40 y todo el combustible que compras es útil, por lo que pagas USD 1 por litro utilizable. Para ir a la Estación B, debes manejar 20 km fuera de tu ruta. Compras 40 litros por USD 38, pero no todo es combustible útil, dado que usarás

$$\frac{20\ km}{12\ km/l} = \frac{5}{3}$$

de litros de combustible para ir y venir de la estación. Así pagas USD 38 por 40 – 5/3 = 38.33 litros de combustible útil o

$$\frac{38}{38.33\ litros} = USD\ 0.99 \text{ por litro de combustible útil.}$$

Es ligeramente ventajoso para tus finanzas manejar a la Estación B. ¿Qué hay de tu amiga?

Tu amiga comprará 40 litros de combustible útil por USD 40 en la Estación A. Su precio por litro de combustible útil es de USD 1.00. Sin embargo, a 4 km/l, usará 5 litros en el camino a la Estación B. Consecuentemente, pagará USD 38 por 35 litros de combustible útil. Esto se traduce a USD 1.08 por litro de combustible útil, lo que no es muy conveniente.

Tú podrías manejar a la Estación B por combustible, pero tu amiga debe seguir yendo a la Estación A.

EVALUAR EL MODELO Y REVISAR

Como se propone, el modelo realiza un trabajo razonable al contestar la pregunta, pero solo para uno o dos individuos específicos. Los estudiantes están ahora en posición de ver como los resultados difieren si una decisión anterior cambia. Una opción es el tamaño del tanque.

Considerando el tamaño del tanque de combustible, los estudiantes sabrán que la mayoría de los vehículos grandes con poco kilometraje por litro tienen tanques más grandes. ¿Esto hace una diferencia? Suponga que el carro de la amiga tiene un tanque de combustible que le permite una compra de 100 litros en lugar de solo 40.

Si los estudiantes comparan el costo de llenar el tanque, el costo en la Estación A es ahora USD 100, mientras que en la Estación B es de (100) • 0.95 + 5 • 0.95 = USD 99.75 dólares. Tu amiga podría ahora ahorrar solo un poquito al manejar hasta allá.

Si los estudiantes consideran el costo por litro de combustible útil, entonces tener el tanque más grande no afecta el costo en la estación A; éste sigue siendo USD 1 por litro útil. En la Estación B, sin embargo, ella compra 100 litros a USD 0.95 por litro a un costo total de USD 95. Dado que 5 litros fueron usados al manejar a la estación B, solo compra 95 litros de combustible útil, que es

$$\frac{USD\ 95}{95\ litros} = USD\ 1\ por\ litro\ de\ combustible\ \text{útil}.$$

Éste es un trato igual por litro de combustible útil. Parece que tendría que tener un tanque aún más grande para ahorrar. Sin embargo, si el ahorro vale la pena el tiempo y esfuerzo, es una cuestión distinta. Lo que si vemos es que el tamaño del tanque de combustible, o sea, la cantidad de combustible que podemos comprar en una sola ocasión, puede ser un componente importante para el problema.

INTERLUDIO DEL DOCENTE. EVALUACIÓN FORMATIVA

Si trabajamos con este problema con una clase grande, podríamos proporcionar un ejemplo en este punto para verificar la compresión de los estudiantes.

> ***Problema ejemplificativo:*** Hay 4 estaciones que venden combustible a diferentes precios. La estación A está en tu ruta normal y vende combustible a USD 1 por litro. La estación B está a 10 km de tu ruta y vende combustible a USD 0.95 por litro. La estación C está a 20 km de tu ruta y vende combustible a USD 0.90 por litro, mientras que la estación D está a 4 km y vende combustible a USD 0.97 por litro.
>
> Considera 3 carros. El carro 1 rinde 4 km/l y tiene un tanque de 45 litros. El carro 2, rinde 4 km/l y tiene un tanque de 100 litros. El carro 3 rinde 15 km/l y tiene un tanque de 45 litros. ¿A cuál estación debe ir el conductor de cada carro a comprar su combustible?

Al trabajar con versiones simplificadas del problema con valores numéricos específicos, la aritmética es la herramienta importante, en lugar del álgebra. El centro del problema se vuelve la estructura, es decir, determinar un método apropiado para comparar y la aritmética para hacer dicha comparación. Una de las dificultades más comunes que los estudiantes tienen en la modelación es tratar de generalizar muy pronto, haciendo el problema muy difícil antes de que se haya visto la estructura subyacente. Jugar con diferentes casos del problema, particularmente considerando casos extremos como se ilustra aquí es muy importante y el tiempo que se toma jugando con estas ideas no debe ser limitado.

UNA SOLUCIÓN ALGEBRAICA: EVALUAR EL MODELO Y REVISARLO

Tal como está, el modelo siempre funciona, pero solo para cálculos de uno a uno. Cada combinación de conductor individual y estación debe ser verificada de forma separada. Pero ahora los estudiantes tienen una buena idea de cómo funciona el problema con valores específicos y pueden escribir una representación algebraica del modelo inicial. Esta representación les permitirá encontrar una solución general.

Las cantidades importantes han sido identificadas. Los estudiantes saben que los precios, la distancia total manejada, el rendimiento del vehículo y el tamaño del tanque, o sea volumen de combustible comprado, son importantes. En este punto, los estudiantes deben emplear un principio de la modelación generalmente aplicable: ya sea asignar a una cantidad un valor fijo, añadiendo una suposición al método usado en el modelo simple o convertirla en una variable que se llevará a través de todo el proceso. La discusión restante toma esta segunda opción, usando letras para denotar las cantidades importantes.

- Que p represente el precio por litro en la estación a lo largo de la ruta y P el precio por litro en la estación que estamos considerando.
- Que D represente la distancia en km que se debe manejar desde la ruta normal hasta la estación de combustible. Un viaje de ida y vuelta es $2D$ km.
- Que M represente el kilometraje por litro del vehículo.
- Que T represente el número de litros de combustible que compramos, en nuestro modelo, 15 litros menos que el tamaño del tanque.

SUPOSICIONES DEL MODELO

El planteamiento del problema implica que el uso del vehículo tiene lugar en una región de rutina bien definida y que las estaciones fuera de esta región ameritan atención especial. Como una suposición inicial, el viaje de ida y vuelta a la estación de combustible fuera de la ruta es visto como un viaje desde y hasta un punto en la región de rutina, como se muestra en el diagrama anterior.

También asumimos en nuestro modelo que el kilometraje del vehículo, M, es constante. Los estudiantes saben que éste varía dependiendo de las condiciones al manejar y la velocidad a la que se viaja. Similarmente, se ha supuesto que la cantidad de combustible a ser comprado es la misma en cada llenado. En un modelo más refinado, podemos revisar estas suposiciones.

Modelo básico 1: costo de llenar el tanque. Usando la formula, costo total = costo de combustible comprado + costo de viaje adicional por combustible, la cuestión se convierte en minimizar C, donde

$$C = T \bullet P + \frac{2D}{M} \bullet P$$

y todas las cantidades son no negativas, permitiendo $D = 0$ para las estaciones en la región de rutina.

Modelo básico 2: costo por litro de combustible útil. Hemos visto que el precio por litro útil para la estación en tu ruta es solo el precio del litro, p, dado que todo el combustible comprado es útil. Por lo tanto, siempre estamos comparando nuestro costo por litro útil en términos de P, con p.

Para calcular el precio por litro útil para las otras estaciones, calculamos el costo del tanque de combustible, $T \bullet P$, y el número de litros útiles

$$T - \frac{2D}{M}$$

El costo de litro útil es la razón de estos dos valores

$$\frac{T \bullet P}{T - \frac{2D}{M}} = \frac{T \bullet P \bullet M}{M \bullet T - 2D}$$

Ahora tenemos una fórmula que los conductores pueden usar para tomar decisiones. Debemos comprar combustible en la estación distante si

$$\frac{T \bullet P \bullet M}{M \bullet T - 2D} < p$$

Como antes, la mayoría de estas letras representan cantidades que no varían.

Modelo básico 3: costo por kilómetros de viaje. Una forma de reconsiderar el enfoque inicial es reflexionar sobre qué es lo que realmente se compra en la transacción. Esta reflexión lleva a la comprensión de que el conductor realmente está comprando kilómetros, en lugar de combustible. Dado que los kilómetros usados al ir y venir de la estación de combustible no son kilómetros disponibles en la región de conducción de rutina, esto da lugar a un nuevo modelo para la cuestión de minimizar C*, donde

$$\mathrm{C}^* = \frac{T \bullet P}{M \bullet T - 2D}$$

Una vez más, todas las variables son no negativas, pero D es 0 en las estaciones de la región de rutina. Note que en esta formulación, C* representa el costo por km en lugar del costo total. Como resultado, el combustible barato a distancias largas ahora parece menos competitivo que en el Modelo Básico 1, dado que los kilómetros útiles disminuyen con la distancia. Este modelo es matemáticamente equivalente al Modelo Básico 2, pero refleja un enfoque diferente en el razonamiento.

USAR LOS MODELOS

Note que cada uno de los modelos anteriores involucra tres variables que son: el costo de queremos minimizar, el precio y la distancia, además de dos parámetros: el volumen de combustible comprado y el valor de km/l del vehículo. Podría ser que los estudiantes no hayan encontrado todas estas cantidades en su trabajo previo, así que podrían necesitar ayuda al usar sus modelos.

Tal vez, la forma más simple de aplicar un modelo algebraico es usar el modelo como una fórmula directa para calcular la medida del costo que es de interés. Cada estación será evaluada separadamente al sustituir la información relevante para la estación dentro de la fórmula.

Los estudiantes pueden usar la misma idea más eficientemente al crear una hoja del cálculo para tabular los costos calculados de C^* para un rango de valores de precio y distancia. El ejemplo mostrado usa el modelo de costo por kilómetro comprado (modelo 3).

Para los estudiantes nuevos en la modelación, éste sería un punto razonable para detenerse en su investigación. Las discusiones sumarias deben continuar centrándose en señalar las decisiones que fueron necesarias para llegar a este punto.

DISTANCIA	PRECIO	COSTO
10	0.75	0.078125
10	0.76	0.079167
10	0.77	0.080208
10	0.78	0.081250
10	0.79	0.082292
20	0.75	0.081522
20	0.76	0.082609
20	0.77	0.083696
20	0.78	0.084783
20	0.79	0.085870
30	0.75	0.085227
30	0.76	0.086364
30	0.77	0.087500
30	0.78	0.088636
30	0.79	0.089773

TABLA C.8: COSTO POR KM COMPRADO, DONDE VAMOS A COMPRAR 50 LITROS Y EL VEHÍCULO RINDE 10 KM POR LITRO

Para los estudiantes que se sienten cómodos trabajando con funciones lineales, es posible usar un enfoque más geométrico del modelo, aunque al comenzar pueden ser necesarias unas pocas indicaciones por parte del docente. Dado que el interés real está en cómo las cosas se comportan a medida que estaciones diferentes son consideradas, las variables que describen las estaciones, denominadas P y D, pueden convertirse en la idea central. El truco es que, de nuevo, se piense en el costo como una constante y se reescriba D en términos de P. Al usar de nuevo el modelo 3 y recordando usar M, T y C^* como constantes revela una relación lineal entre la distancia y el precio:

$$\mathrm{D} = \frac{TMC^* - TP}{2C^*} \qquad \text{o} \qquad \mathrm{D} = \frac{TM}{2} - \frac{TP}{2C^*}$$

Cuando se consideran en el plano $P - D$, tanto la pendiente como la intersección en D de la línea están determinadas completamente por el tamaño del tanque, el kilometraje o rendimiento de un vehículo en particular y el valor de C^*. Por ende, todas las estaciones que llevan a la misma medida de costo general están descritas por puntos en una sola línea. Adicionalmente, cambiar C^* solo cambia la pendiente

$$\frac{T}{2C^*}$$

por lo que la meta de minimizar C^* se convierte en escoger la mejor línea de una familia infinita de líneas radiales que pasan a través de la intersección vertical común

$$\frac{TM}{2}$$

Puesto en acción, comparar estaciones se reduce a comparar líneas sobre las cuales caen las estaciones rivales. Esto es, graficar la información del precio y la distancia para las estaciones rivales en el plano *P-D*, después mover una línea en el sentido del reloj alrededor del punto de giro en el eje vertical hasta el último punto de una estación (evocando el problema, *¿Cuál computadora?).* Esto significa que la determinación de la mejor estación puede ser hecha de forma enteramente geométrica después de calcular solo la intersección vertical.

Note que la intersección vertical,

$$\frac{TM}{2}$$

tiene una buena interpretación, ya que es la mitad del alcance del vehículo. Así que, ajustar el modelo para aplicarlo a otro vehículo involucra saber este nuevo alcance.

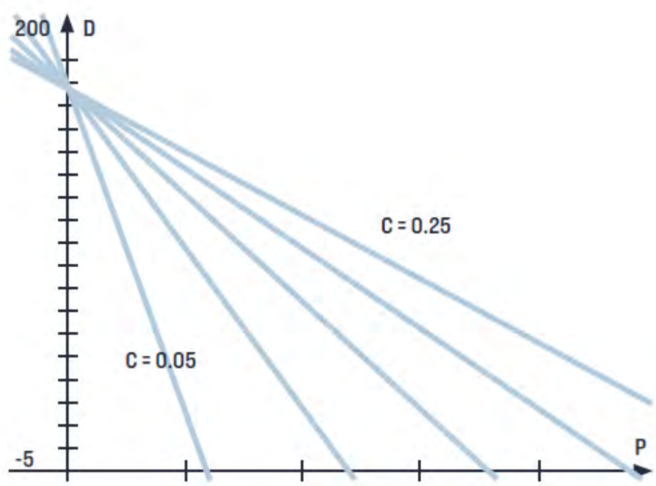


FIGURA C.17: TÍPICA VISUALIZACIÓN DE LA LÍNEA OSCILATORIA

CONCLUSIONES

La meta primaria del escenario de *Manejando por Combustible* es enfatizar la importancia de motivar a los estudiantes a dedicar el tiempo inicial a jugar con problemas pequeños usando números simples. Al invertir tiempo en estos casos especiales, los estudiantes pueden tantear el problema y observar qué es importante y qué puede ser dejado de lado, además de usar su trabajo para desarrollar una forma más general del modelo. Nuestra experiencia con los estudiantes nuevos en la modelación es que quieren llegar al álgebra antes de haber entendido realmente la estructura del problema. Al no invertir tiempo al inicio en jugar con la situación, pierden frecuentemente ideas que pueden ampliamente simplificar y mejorar su trabajo.

APÉNDICE D: HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN

Este apéndice contiene ejemplos de herramientas de evaluación, incluyendo listas de control y rúbricas, que usted puede usar durante la enseñanza de la modelación.

En la primera sección, discutimos un plan de evaluación formativa a ser usado con modeladores activos involucrados en varias etapas del proceso de modelación. Las secciones restantes incluyen ejemplos de rúbricas y otras herramientas designadas primariamente para evaluar el resultado general de una actividad de modelación matemática, así como una breve discusión de su uso sugerido.

MUESTRA DE PREGUNTAS PARA LA EVALUACIÓN DEL PROCESO DE MODELACIÓN

INVOLUCRANDO A ESTUDIANTES MODELADORES

El proceso de modelación consiste en componentes inherentemente interconectados que son usados de forma iterativa. Sin embargo, también cuenta con componentes individuales identificables que los modeladores encuentran necesariamente cuando trabajan en un proyecto. En esta sección discutimos una colección de preguntas diseñadas para la evaluación formativa de estudiantes involucrados con la modelación matemática. Las siguientes subsecciones constan de preguntas organizadas por su conexión con algún componente del proceso de modelación, las cuales puede usted considerar para presentarlas a sus estudiantes y evaluar su enfoque de la modelación matemática centrada en la resolución de un problema, así como para ayudarles a impulsar su progreso como modeladores independientes. Una pequeña discusión sobre el uso de tales preguntas y el momento apropiado para plantearlas se dará antes de cada subsección. No sugerimos presentar todas las preguntas de una subsección a todos los estudiantes; en cambio, recomendamos involucrar a los estudiantes en una o más preguntas asociadas con cada componente, sin importar su habilidad para demostrar destreza modeladora. También, note que, debido a la naturaleza iterativa de la modelación, es muy posible que el orden en el que plantee las preguntas sea diferente de la forma en la que se enlistan a continuación.

La Tabla D.1 al final de esta sección replantea preguntas centrales asociadas con cada componente de la modelación e identifica vocabulario relacionado con este proceso.

DEFINIR EL PROBLEMA

Poco antes de iniciar la actividad de modelación, los estudiantes pueden preocuparse de cómo empezar o, alternativamente, pueden tener múltiples ideas acerca de cómo proceder. Las siguientes preguntas, muchas de las cuales pueden ser planteadas poco después de que se ha iniciado la lluvia de ideas, pueden ayudar a los modeladores a concentrarse y proceder.

- Describe el problema que se le ha pedido a tu equipo que resuelva. ¿Qué información necesitas para resolver este problema?
- ¿Cómo vislumbras la solución a tu problema? ¿Es posible que tu solución tenga más de una respuesta razonable? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el problema específico que tu modelo va a resolver? ¿Cómo podrías completar la frase “Nuestro modelo te dirá ____?”

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO. DEFINIR VARIABLES Y HACER SUPOSICIONES

La lluvia de ideas con frecuencia lleva al desarrollo de muchas ideas valiosas que pueden ser usadas para crear un modelo. Sin embargo, los estudiantes también podrían abrumarse con el proceso. Por ejemplo, un estudiante puede determinar que necesitan cierta información para resolver el problema y, sin embargo, ser incapaz de encontrar un valor para usar en su modelo. Una situación como ésta puede ser enfocada de una variedad de formas; varias de las cuales pueden ser abordadas con las respuestas de los estudiantes a estas preguntas.

- De los factores que has identificado como importantes para el problema, ¿cuáles cambian y cuáles permanecen igual?
- ¿Qué suposiciones necesitas hacer para encontrar una solución? ¿Qué te llevó a hacer estas suposiciones?
- ¿Qué te haría cambiar una suposición?
- ¿Cuáles son los factores primarios que has identificado como importantes para el problema? ¿Cómo planeas incorporar estos valores en tu modelo?
- ¿Dónde encontraste números, o datos, para usar en tu modelo?
- Al investigar, ¿encontraste más de un valor para un factor? ¿Cómo determinarás qué valor o valores, usar en tu modelo?

ENCONTRAR UNA SOLUCIÓN

Crear un modelo matemático desde cero puede ser una empresa abrumadora, especialmente para estudiantes nuevos en el proceso. Un buen punto de partida para el desarrollo del modelo se construye directamente sobre el trabajo en el que los estudiantes se hayan involucrado anteriormente, pero requiere uno o dos pasos extra hacia adelante. En particular, motivar a los estudiantes a identificar y reflexionar sobre métodos para organizar los datos que han recolectado o combinar valores para obtener un valor que tenga sentido en relación con la pregunta que se investiga puede llevar a una solución significativa. Como resultado, un número de preguntas presentadas en esta subsección son similares o casi idénticas a aquellas encontradas en otras subsecciones. Sin embargo, el contexto en el cual estas preguntas son presentadas a los estudiantes ayuda a motivar el desarrollo de modelos matemáticos.

- Describe el problema específico que tu modelo debe resolver. ¿Cuáles son las unidades asociadas a la solución? Si es apropiado, ¿de qué manera tu solución implica la necesidad de cuantificación?
- De los factores que has identificado como importantes para el problema, ¿cómo pueden estos ser combinados de una forma que tenga sentido en el mundo real?
- ¿Cómo puedes organizar tus datos para compartir con un individuo que no está familiarizado con tu proyecto? (Por ejemplo, ordenamiento, gráficos, estadísticas, etc.)

- ¿Qué técnicas matemáticas has usado para analizar los datos hasta ahora?
- Describe las matemáticas usadas en esta porción de tu modelo.
- ¿Cómo planeas comunicar tus resultados finales?

ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO

El valor de un modelo es determinado por su habilidad de proveer soluciones razonables, definido por su uso o la audiencia, a un problema dado. Poco después de que el modelo matemático ha sido desarrollado, o cuando se investigue la utilidad de un modelo exterior, es recomendable analizar el modelo. En pocas palabras, los modeladores matemáticos responsables verificarán la aplicabilidad y entenderán los límites del desempeño de su modelo antes de compartir sus resultados con otros.

- ¿Cómo funciona tu modelo? ¿Qué tipo de valores pueden ser introducidos en tu modelo? ¿Cómo se ve el resultado?
- ¿Cómo planeas comunicar tus resultados? ¿Piensas que una gráfica pueda ayudar a la gente a entender tu información, modelo y resultados? ¿Qué tipo de gráfica o gráficas son las más apropiadas?
- ¿Cómo responde el modelo la pregunta que se te planteó? ¿Tiene sentido tu respuesta? (Por ejemplo, ¿las unidades son apropiadas?)
- ¿Cómo sabes que tu modelo funciona? Es decir, ¿los resultados tienen sentido en el contexto de la pregunta que estás resolviendo?
- ¿Cuándo funciona tu modelo? ¿Existen instancias en las cuales necesites ser cuidadoso porque puede que no funcione?
- ¿Cómo reacciona tu modelo a cambios en los valores introducidos?
- ¿Qué mejoras le harías a tu modelo? Por ejemplo, ¿qué harías de manera diferente si tuvieras más tiempo? ¿Obtendrías mejores datos? ¿Alguna otra cosa?

REPORTAR RESULTADOS

Para que una solución o soluciones matemáticas tengan valor, necesitan ser entendidas en el contexto del problema original y por una audiencia interesada en conocer los resultados.

El resultado final puede ser reportado en una variedad de formas. Por ejemplo, un informe escrito o presentaciones orales son formatos de reporte comunes. Más aún, el reporte completo es comúnmente evaluado de forma acumulativa. Véase las rúbricas sugeridas más adelante en este apéndice.

Las preguntas presentadas en esta subsección motivan a los estudiantes modeladores a ser específicos y reflexivos al compartir su trabajo con otros.

- Explica el proceso que tu equipo usó al desarrollar la solución.
- Explica las matemáticas usadas por tu equipo para desarrollar la solución.
- ¿Con quién estás compartiendo los resultados? ¿Cuál es la audiencia de tu reporte?
- Si es apropiado, ¿cómo participó cada uno de tus compañeros de equipo en el proceso de modelación? ¿Qué aprendiste de otros miembros de tu equipo?
- ¿Cuáles son esas tres, cuatro o cinco cosas que quieres que cualquiera que lea o escuche tu reporte entienda acerca de tu modelo? Con tu audiencia en mente, ¿cómo puedes compartir tus resultados de forma clara y concisa?

DESPUÉS DE ESTE MODELO, ANTES DEL SIGUIENTE

Cuando los estudiantes se involucran en una actividad completa de modelación, es recomendable tomar tiempo para reflexionar sobre la experiencia. Algunas preguntas adicionales pueden proporcionar a los estudiantes perspectivas valiosas que permitirán un éxito continuo y mejorado con la modelación en el futuro.

- ¿Necesitaste revisar tu modelo en algún punto durante la actividad? Si es así, ¿por qué? ¿Cómo arreglaste el modelo?
- ¿Puedes identificar una idea matemática que haya sido clave para tu habilidad de desarrollar el modelo?
- ¿Cómo cambió tu estrategia de modelación a través del periodo de trabajo?
- ¿Qué consejo le darías a un compañero de clase o a ti mismo antes de desarrollar un modelo matemático?
- Si tuvieras la oportunidad de realizar esta actividad una vez más, ¿qué harías? ¿Usarías el mismo enfoque o alterarías tu plan?
- Si se te diera más tiempo, ¿qué harías tú o tu equipo para mejorar el modelo o los resultados?
- ¿Cuál fue el aspecto más sorpresivo o inesperado de este proyecto?

COMPONENTE DE MODELACIÓN	PREGUNTAS ACERCA DE TU MODELO Y CÓMO LO HICISTE	VOCABULARIO RELACIONADO A LA MODELACIÓN A SER REFORZADO
DEFINIR EL PROBLEMA	¿Cuál es el problema importante que se te ha pedido resolver? Puede haber más de una respuesta posible.	Problema abierto, restricciones
DEFINIR EL PROBLEMA	¿Cuál es el problema específico que tu modelo va a resolver? (Mi modelo te dirá cómo…)	Específico, central
HACER SUPOSICIONES	¿Qué ideas pensaste, pero decidiste no intentar?	Eliminar, Priorizar
HACER SUPOSICIONES	¿Qué has supuesto para resolver el problema? ¿Por qué tomaste estas decisiones?	Suposición/ supuesto.
DEFINIR VARIABLES	¿Qué cantidades son importantes? ¿Cuáles cambian y cuáles permanecen igual?	Variable
DEFINIR VARIABLES	¿Dónde encontraste los números que usaste en tu modelo?	Recursos, referencias
OBTENER UNA SOLUCIÓN	¿Qué imágenes, diagramas o gráficas pueden ayudar a la gente a entender tu información, modelo y resultados?	Diagrama, gráfica, etiqueta
OBTENER UNA SOLUCIÓN	¿Qué ideas matemáticas usaste para describir la situación y resolver tu problema?	Situación
ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO	¿Cómo sabes que tus cálculos son correctos? ¿Recordaste usar unidades (como dólares o pulgadas)?	Cálculo, unidad
ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO	¿Cuándo funciona tu modelo? ¿Cuándo necesitas tener cuidado porque puede que no funcione?	Limitaciones
ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO	¿Cómo sabes que tienes un modelo bueno/útil? ¿Por qué tu modelo tiene sentido?	Prueba, validación
ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO	Si tuvieras que mejorar tu modelo, ¿qué harías?	Mejoramiento, iteración
REPORTAR RESULTADOS	Explica tu modelo matemático con palabras y con números	Prueba, validación
REPORTAR RESULTADOS	¿Cómo ayudó cada uno de tus compañeros de equipo?	Modelo
REPORTAR RESULTADOS	¿Qué aprendió cada miembro de tu equipo de los demás?	Colaborar
REPORTAR RESULTADOS	¿Cuáles son las 5 cosas más importantes que quieres que tu audiencia/cliente entienda acerca de tu modelo y/o solución?	Cliente/audiencia

TABLA D.1: RÚBRICA DE EVALUACIÓN PARA LA MODELACIÓN (ADAPTADA DE LEVY, IMMERSION).

LISTAS DE CONTROL/HOJAS DE EVALUACIÓN DE PROYECTOS

CARACTERÍSTICAS Y USO

La producción resultante de un modelo matemático varía enormemente dependiendo de las preferencias del instructor y, en el mundo real, de las demandas e intereses del cliente o audiencia. Más aún, la introducción de una tarea matemática, usualmente no tradicional, motiva la necesidad de compartir las expectativas dentro de un proyecto de modelación con los estudiantes.

Una lista de control para un proyecto de modelación matemática puede ser una herramienta útil para que los estudiantes la llenen antes de completar la tarea. Adicionalmente, los instructores pueden usar la lista de control como una herramienta de evaluación acumulativa. En esta sección proporcionaremos dos ejemplos de listas de control que son usadas actualmente en clases de modelación matemática. Ambas listas pueden ser modificadas para encajar con las necesidades de una clase específica o un proyecto de modelación.

LISTA DE CONTROL I

La primera lista, Tabla D.2, aísla cinco elementos generales de evaluación en un proyecto de modelación matemática. Notablemente, proporciona a los estudiantes ejemplos de situaciones problemáticas comunes que el instructor ha identificado al revisar modelación matemática presentada en reportes escritos.

LISTA DE CONTROL II

La segunda lista, Tabla D.3 provee, de forma similar, una colección de categorías que necesitan ser incluidas en una entrega de modelación matemática. En contraste con la Lista I, este documento identifica la necesidad de que los estudiantes abordaren la información señalada como “específica de este proyecto”. Se pide que los estudiantes que trabajan en el proyecto asociado a este documento investiguen el crecimiento poblacional de gatos ferales. Esta colección de cuatro preguntas puede ser ajustada para ser usada con proyectos de modelación alternativos.

RETROALIMENTACIÓN DEL MODELO

- ☐ Se proporciona un escrito
- ☐ Comprensión demostrada de la premisa del problema: explicito (escrito)/ implícito (matemáticas)
- ☐ Uso adecuado y demostrado del Método de Separación de Variables
- ☐ Análisis matemático completo presentado y usado para abordar el problema
- ☐ Organización (ortografía, gramática, formato, estilo, notación matemática)

GRADO ________________

VOLVER A PRESENTAR PARA OBTENER CALIFICACIÓN
Si está señalado que debes volver a presentar para obtener calificación, entonces hay errores críticos en tu matemática o en tu trabajo escrito. Puede ser una buena idea que nos veamos antes de que trates de nuevo por tu cuenta, para que pueda ayudarte a entender qué se requiere.

CUESTIONES COMUNES
Figuras y Tablas
- Referirse a todas las figuras y tablas con números en el cuerpo principal del texto
- Leyendas y números de figuras son requeridos en la parte inferior de cada tabla
- Números de tablas y títulos son requeridos en la parte superior de cada tabla

Tiempo verbal y Persona
- Evita la primera persona del singular (Yo, mí, me)
- Asegúrate de ser consistente en el tiempo verbal a lo largo del texto
- ¡La voz pasiva es aceptable en los reportes técnicos!

Apéndices
- Si usas algún apéndice, asegúrate de referenciarlo en el texto principal, pues de otra forma, ¡puede que el lector nunca sepa todas las cosas buenas que has escondido ahí atrás!
- Los apéndices deben estar señalados con letras (A, B, C) o con números romanos (I, II, III)

Flujo
- Debe haber un arco narrativo. Asegúrate de que las ideas sean introducidas apropiadamente, muy similar a la forma en que necesitas introducir un personaje en una historia
- Aunque las personas que no son matemáticos pueden perderse en un par de detalles, cualquiera debe de ser capaz de leer tu reporte y entender qué hiciste y por qué es importante.

TABLA D.2: ELEMENTOS GENERALES DE EVALUACIÓN EN UN PROYECTO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA.

LISTA DE CONTROL DE MODELACIÓN

- ☐ Página de título separada, con nombres y números de identificación de los estudiantes, profesor, sección, grupo.
- ☐ Una introducción que claramente plantee el problema a ser resuelto
- ☐ Un reporte con secciones distintivas y suposiciones concisas y claras, descripción de los parámetros y las variables del modelo, proceso de solución, resumen y conclusión (¿tiene sentido tu solución y por qué?, ¿cuáles son las fortalezas y debilidades de tu enfoque?)
- ☐ Usa el editor de ecuaciones o escríbelas a mano

  ex: sqrt (x^2+y^2) está mal

  ex: $\sqrt{x^2+y^2}$ está bien
- ☐ ¿Las derivaciones y los cálculos son claros, lógicos y fáciles de seguir?
- ☐ Hay una descripción clara de las variables, así como diagramas/tablas adecuadamente etiquetados y con las unidades correctas
- ☐ Se le da agradecimiento a quien lo merece (esto incluye ayuda dada por individuos). Referencias escritas.
- ☐ ¿Se contestan todas las preguntas planteadas, incluyendo las preguntas de la discusión?
- ☐ ¿Se muestra todo el trabajo? ¿Se adjuntan los cálculos hechos a mano y estos son referenciados fácilmente?
- ☐ ¿La ortografía, la gramática y la puntuación son correctas? ¿Es la matemática correcta?

ESPECÍFICO A ESTE PROYECTO

- ☐ Se propuso un modelo para medir la población de gatos
- ☐ Se propuso una estrategia de intervención
- ☐ Se usaron ambos modelos para hacer predicciones a futuro y evaluar la calidad de las soluciones
- ☐ Se incluyeron todos los lineamientos del reporte final

TABLA D.3: UNA COLECCIÓN DE CATEGORÍAS A SER INCLUIDAS EN UNA ENTREGA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

CARACTERÍSTICAS Y USO

Los modelos matemáticos raramente producen resultados idénticos o soluciones numéricas únicas. En consecuencia, la evaluación formativa de proyectos de modelación se centra menos en determinar una solución específica y más en qué tan apropiadas son las matemáticas usadas para desarrollar una solución y la habilidad del modelador de comunicar los resultados de forma efectiva. Las siguientes rúbricas están diseñadas para articular las expectativas y los estándares de éxito de un proyecto de modelación. Por lo tanto, las rúbricas son usadas por instructores para evaluar el trabajo de modelación de los estudiantes y también por los estudiantes como herramientas de evaluación entre pares. Sugerimos que se familiarice a los estudiantes con la rúbrica de modelación de la clase lo más temprano posible, al invitarlos a calificar el resultado de modelación de terceros. Por ejemplo, las entidades gubernamentales generan regularmente reportes basados en modelación. Crear una tarea que requiera que los estudiantes usen una rúbrica para evaluar el resumen ejecutivo de tales reportes ayuda a que auto identifiquen lo que se espera cuando comunican soluciones matemáticas.

RÚBRICA PARA TRABAJOS ESCRITOS

Una rúbrica general usada para evaluar resúmenes executivos independientes puede ser encontrada en la Tabla D.4. Ésta es significativamente más detallada que las listas de control, debido a la atención al detalle esperado en reportes que tienen dos páginas o menos al proporcionar los resultados asociados con un proyecto de modelación completo. Esta rúbrica puede ser modificada para usarse con reportes de modelación completos y de varias páginas al enfatizar aspectos asociados con el documento más extenso. En particular, se recomienda que las referencias sean identificadas y que se le dé detalle adicional y atención al análisis y la comunicación de resultados.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE MODELACIÓN (3 PUNTOS TOTALES)			
IDEAL	**SATISFACTORIO**	**NECESITA MEJORAR**	**INCOMPLETO**
(3 puntos) Planteamiento del problema conciso que indica exactamente cual será el resultado del modelo y, si es necesario, identifica la audiencia o perspectiva del modelador. El planteamiento es presentado al inicio del problema.	(2 puntos) El planteamiento del problema es fácilmente identificable pero no es preciso o consistente con otros planteamientos en el escrito.	(1 punto) El planteamiento del problema es difícil de entender o está escondido en el texto.	(0 puntos) No se da planteamiento del problema.

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO: HACER SUPOSICIONES Y RECONOCER LIMITACIONES (3 PUNTOS TOTALES)			
IDEAL	**SATISFACTORIO**	**NECESITA MEJORAR**	**INCOMPLETO**
(3 puntos) Las suposiciones primarias usadas para desarrollar el modelo son claramente identificables, fáciles de leer y están bien justificadas. Las limitaciones dadas por la simplificación son mencionadas cuando es apropiado.	(2 puntos) Las suposiciones primarias son señaladas; falta justificación y legibilidad.	(1 punto) Existen suposiciones y justificaciones, pero son difíciles de identificar en el texto.	(0 puntos) No se dan suposiciones o justificaciones (por falta de suposiciones).

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO: DEFINIR VARIABLES E IDENTIFICAR PARÁMETROS (3 PUNTOS TOTALES)			
IDEAL	**SATISFACTORIO**	**NECESITA MEJORAR**	**INCOMPLETO**
(3 puntos) Señala y racionaliza la necesidad de factores primarios que influencian el fenómeno que está siendo modelado en formato legible; se especifican unidades apropiadas.	(2 puntos) Los parámetros y variables importantes son apropiadamente enlistados, pero sin explicación suficiente.	(1 punto) Las Variables/Parámetros son débiles, casi no mencionados o difíciles para que el lector los identifique en el texto.	(0 puntos) No se identifican variables o parámetros.

SOLUCIÓN: EL MODELO USA MATEMÁTICA SIGNIFICATIVA (4 PUNTOS TOTALES)			
IDEAL	**SATISFACTORIO**	**NECESITA MEJORAR**	**INCOMPLETO**
(4 puntos) Se proporciona un atisbo legible de el/los método(s) matemático(s) usado(s) para resolver el problema. Se presentan un enfoque y un resultado plausibles.	(3 o 2 puntos) Se plantea el enfoque matemático, pero aspectos del método son inconsistentes, difíciles de entender o están incompletos.	(1 punto) El modelo es planteado y/o contiene errores matemáticos reparables.	(0 puntos) El modelo no es presentado o contiene errores significativos.

SOLUCIÓN: LOS RESULTADOS SON ACCESIBLES A LA AUDIENCIA (4 PUNTOS TOTALES)			
IDEAL	**SATISFACTORIO**	**NECESITA MEJORAR**	**INCOMPLETO**
(4 puntos) Presenta claramente una solución que es consistente con el planteamiento del problema original. Si es apropiado, una ayuda visual/gráfica es incluida.	(3 o 2 puntos) La respuesta es planteada, pero aspectos de la/las solución(es) son inconsistentes, difíciles de entender o están incompletas (por ejemplo, no identifica las unidades de medición).	(1 punto) La respuesta es dada sin trasfondo contextualizado (por ejemplo, gráficas y unidades apropiadas, etc.).	(0 puntos) No se da una solución.

ANÁLISIS Y EVALUACIÓN DEL MODELO (3 PUNTOS TOTALES)			
IDEAL	**SATISFACTORIO**	**NECESITA MEJORAR**	**INCOMPLETO**
(3 puntos) La viabilidad y confiabilidad de la solución de modelación matemática es abordada. Por ejemplo, ¿qué tan sensible es el modelo a cambios de valores de los parámetro o a alteraciones de las suposiciones? ¿Cómo se compara a otras soluciones o datos históricos?	(2 puntos) Se aborda, pero el análisis no cuenta con dimensionalidad apropiada. Por ejemplo, consecuencias obvias del resultado planteado o comparaciones bien conocidas son ignoradas.	(1 punto) Algo de análisis es proporcionado, pero sin ningún sentido de perspectiva.	(0 puntos) No se incluye análisis o evaluación en el reporte. Se usan matemáticas incorrectas en el análisis.

ESTILO DE ESCRITURA Y ORGANIZACIÓN (5 PUNTOS TOTALES)			
IDEAL	**SATISFACTORIO**	**NECESITA MEJORAR**	**INCOMPLETO**
(5 o 4 puntos) Ortografía y gramática correctas se usan a lo largo del reporte. El escrito está bien formateado y su lectura es agradable. Ayudas visuales (si son apropiadas) están bien escogidas y son fáciles de interpretar.	(3 o 2 puntos) Hay múltiples errores de ortografía, gramática y formato. No hay ayudas visuales, características clave de legibilidad o no se conectan claramente con la solución.	(1 punto) Significativa falta de consideración por las normas comunes de ortografía común y las reglas matemáticas.	(0 puntos) Falta de consideración total a las normas de ortografía y de gramática y a las reglas matemáticas.

TABLA D.4: UNA RÚBRICA GENÉRICA USADA PARA EVALUAR RESÚMENES EJECUTIVOS INDEPENDIENTES.

RÚBRICA DE PRESENTACIÓN

La siguiente hoja de evaluación, Tabla D.5, sirve simultáneamente como rúbrica para desarrollar una presentación oral de los resultados de la modelación matemática, una herramienta de evaluación entre pares para los estudiantes y una herramienta de evaluación para los instructores. El documento provisto es la versión proporcionada a los estudiantes cuando se preparan para evaluar presentaciones de sus compañeros. Un uso sugerido de este recurso es hacer que individuos o equipos se evalúen entre ellos para que en las siguientes presentaciones puedan proporcionarse inmediatamente retroalimentación mutua.

HOJA DE EVALUACIÓN DE PRESENTACIÓN DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Presentación hecha por el equipo:

Por favor, selecciona un valor (1 – 5) que refleje el alcance con el cual estás de acuerdo con la afirmación dada.

	TOTALMENTE EN DESACUERDO	EN DESACUERDO	NEUTRAL	DE ACUERDO	TOTALMENTE DE ACUERDO
Entendí la interpretación de las preguntas del equipo ponente.	1	2	3	4	5
Todas las suposiciones planteadas están adecuadamente justificadas.	1	2	3	4	5
Las fortalezas y debilidades del modelo fueron abordadas.	1	2	3	4	5
Se usaron matemáticas apropiadas para crear el modelo.	1	2	3	4	5
Una solución final fue claramente presentada.	1	2	3	4	5
El modelo matemático produjo un resultado plausible.	1	2	3	4	5
Las ayudas visuales fueron fáciles de leer y entender.	1	2	3	4	5
El equipo abordó escenarios alternativos auténticos y/o la necesidad de trabajo futuro.	1	2	3	4	5
Disfruté la presentación; el/los presentador(es) capturaron mi atención durante toda la extensión de la charla.	1	2	3	4	5
Me gustaría aprender más sobre el método de solución de este equipo.	1	2	3	4	5

¿Qué pregunta te gustaría hacerle a este equipo?

Preguntas adicionales o comentarios:

TABLA D.5: UNA RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN ENTRE PARES DE PRESENTACIONES ORALES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA (ADAPTADA DE GALLUZO Y WENDT) [1]

REFERENCIAS

PREFACIO

1. Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report A Pre-K-12 Curriculum Framework*. Alexandria: American Statistical Association.

CAPÍTULO 2

1. NCTM. (2014). *Principles to Actions*, http://www.nctm.org/principlestoactions/. (Traducido por CIAEM como *De los principios a la acción, https://www.nctm.org/Store/Products/De-los-principios-a-la-acci%C3%B3n--Para-garantizar-el-%C3%A9xito-matem%C3%A1tico-para-todos-(POD)(Spanish-Edition)/*)

2. Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM). (Traducido por las Escuelas Públicas de San Diego, California como Estándares Estatales Comunes de las Matemáticas, https://commoncore-espanol.sdcoe.net/CCSS-en-Espanol/Mathematics)

3. Framework for 21st Century Learning, http://www.p21.org/our-work/p21-framework

4. Pehkonen, Erkki. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM*), 29 (3), 63-67.

5. Schoenfeld, Alan H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145-166.

6. Lesh, R. y Yoon, C. (2007). **Modelling** and Applications in Mathematical Education, The 14th ICMI Study. *Issues in Applications and Modeling*. P.161. New York: Springer.

7. Heaton, R. M. (2000). *Teaching mathematics to the new standards: Relearning the dance*. New York: Teachers College Press.

8. Zawojewski, Judith S., Lesh, Richard y English, Lyn. (2003). A models and modelling perspective on the role of small group learning activities. En Richard Lesh y Helen M. Doerr, *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. (pp. 337-358). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

9. Bliss, K.M., Fowler, K.R. y Galluzzo, B.J. (2014). *Math Modeling, Getting Started & Getting Solutions*. PA: SIAM.

10. Lehrer, Richard y Schauble, Leona. (2000). Inventing Data Structures for Representational Purposes: Elementary Grade Students' Classification Models. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 51-74.

11. Carlson, Mary Alice, Wickstrom, Megan H., Burroughs, Elizabeth A. y Fulton, Elizabeth W. (2016). A Case for Mathematical Modeling in the Elementary Classroom. En *Annual Perspectives in Mathematics Education (APME) 2016: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. (pp 121-130). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

12. Smith, Margaret Schwan y Stein, Mary Kay. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Traducido por CIAEM como *5 prácticas para orquestar discusiones productivas en matemáticas*, https://ciaem-iacme.org/traducciones/)

13. Integrating Mathematical Modeling, Experiential Learning and Research through a Sustainable Infrastructure (IMMERSION) and an Online Network for teachers in the elementary grades. 2014 – 2017. A National Science Foundation Sponsored STEM-C Program (NSF-1441024) through George Mason University, Montana State University, and Harvey Mudd College

14. English, Lyn, y Watters, James. (2004). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 59-80.

15. SIAM Report from Second Modeling Across the Curriculum Conference http://www.siam.org/reports/ModelingAcross%20Curr_2014.pdf

16. Hirsch, Christian (Ed.). (2016). *Annual Perspectives in Mathematics Education: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

17. Levy, Rachel. Five Reasons to Teach Mathematical Modeling, http://www.americanscientist.org/blog/pub/5-reasons-to-teach-mathematicalmodeling

18. http://www.nctm.org/Publications/mathematics-teaching-in-middle-school/2013/Vol19/Issue1/The-Footprint-Problem_-A-Pathway-to-Modeling/

19. Hiebert, James y Grouws, Douglas A.. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. En Frank K. Lester, Jr. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 371–404). Charlotte, N.C.: Information Age; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

20. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, Va.: NCTM. (Traducido por CIAEM como *De los principios a la acción, https://www.nctm.org/Store/Products/De-los-principios-a-la-acci%C3%B3n--Para-garantizar-el-%C3%A9xito-matem%C3%A1tico-para-todos-(POD)(Spanish-Edition)/*)

21. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2017). *Enhancing Classroom Practice with Research behind Principles to Actions.* Reston, Va.: NCTM.

22. Lobato, J. y Ellis, A. B. (2010). *Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning*. R. M. Zbiek (Series Ed.), Essential understandings. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

23. Stein, M.K., Smith, M.S., Henningsen, M.A. y Silver, E.A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.* New York: Teachers College Press, Columbia University.

CAPÍTULO 3

1. y 2. Zawojewski, Judith y Richard Lesh (2003). A models and modeling perspective on problem solving. En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* (pp. 355-356). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

3. Goebel, John y Dan Teague. "The Michael Jordan Problem," *Everybody's Problems, Consortium,* Number 68, COMAP, Inc. Lexington, Massachusetts, Winter, (1998).

4. Compton, Helen y Dan Teague. "The Computer Problem," *Everybody's Problems, Consortium,* Number 56, COMAP, Inc, Lexington, Massachusetts, Winter, (1995).

5. Lesh, Richard y Doerr, Helen. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

6. Doyle, Dot y Dan Teague, "The Gas Station Problem," *Everybody's Problems,* Consortium, Number 88, COMAP, Inc. Lexington, Massachusetts, Spring/Summer, (2005).

7. US Department of Labor's Office of Disability Employment Policy (ODEP*), Skills to Pay the Bills: Mastering Soft Skills for Workplace Success,* (n.d.), p. 56. http://www.dol.gov/odep/topics/youth/softskills/softskills.pdf

8. Good, Thomas, et al. (Dec/Jan., 1989/1990). Using work groups in Mathematics Instruction, *Educational Leadership,* 47(4), p. 61.

9. Compton, Helen y Dan Teague, "The Irrigation Problem," *Everybody's Problems, Consortium,* Number 63, COMAP, Inc, Lexington, Massachusetts, Fall, (1997).

10. Bullard, Floyd y Dan Teague, "The Hot Dog Stand Problem", *Everybody's Problems, Consortium,* Number 82, COMAP, Inc. Lexington, Massachusetts, Summer, (2002).

11. Compton, Helen y Dan Teague, "The Playoff Problem," *Everybody's Problems, Consortium,* Number 60, COMAP, Inc, Lexington, Massachusetts, Winter, (1996).

12. North Carolina School of Science and Mathematics (2000). *Contemporary Precalculus through Applications.* Chicago, Illinois: Everyday Learning, Corp.

13. George E. P. Box, William G. Hunter, J. Stewart Hunter. (1978). *Statistics for Experimenters,* New York: John Wiley & Sons. p. 440.

CAPÍTULO 4

1. H.D. Henderson. (1958). *Supply and Demand.* Chicago: University of Chicago Press. p 22.

APÉNDICE A

1. Homemade Bouncy Balls recipe: http://www.pbs.org/parents/crafts-for-kids/superbouncy- balls/

Alexander, Nathan N. (2012), "Choosing a College" En Heather Gould, Diane R. Murray y Andrew Sanfratello (Eds.). *Mathematical Modeling Handbook*. (pp. 39-48). Bedford, MA: COMAP.

An, Michael, Guy Blanc, Evan Liang, Sandeep Silwal y Jenny Wang, "M3 Challenge Champions," *Moody's Mega Math Challenge*, marzo 1, 2015. https://m3challenge.siam.org/sites/default/files/uploads/4902%20ncssm.pdf

"Birthday Cupcakes," *Balanced Assessment*. Accesado en enero 29, 2015. http://hgse.balancedassessment.org/p007.html

NYC Taxi & Limousine Commission, "Taxicab Rate of Fare." Accesado en agosto 2015. http://www.nyc.gov/html/tlc/html/passenger/taxicab_rate.shtml

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2013). *PISA 2012 Released Mathematics Items*. PDF e-book. https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2012-2006-rel-items-maths-ENG.pdf

PARCC, *Art Teacher's Rectangular Array (Sample Mathematics Item Grade 3*). Noviembre 2013. http://www.parcconline.org/

PARCC, *Temperature Changes (Algebra II/Math III Sample Item)*. Agosto 19, 2013. http://www.parcconline.org/

Smarter Balanced Assessment Consortium, "43028 [EBooks Advertising]" Smarter Balanced Assessment Consortium Sample Items, accesado en enero 1, 2015. http://sampleitems.smarterbalanced.org/itempreview/sbac/index.htm

"Stack 'em Up," *Balanced Assessment*. Accesado en enero 29, 2015. http://hgse.balancedassessment.org/p022.html

TIMSS 2011 Assessment, *TIMSS USA Grade 4 Released Mathematics Items.* Chestnut Hill, MA y Amsterdam, Paises Bajos: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), IEA Secretariat, 2013. PDF e-book. https://nces.ed.gov/timss/pdf/TIMSS2011_G4_Math.pdf

TIMSS 2011 Assessment, *TIMSS USA Grade 8 Released Mathematics Items*. Chestnut Hill, MA y Amsterdam, Paises Bajos: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), IEA Secretariat, 2013. PDF e-book. https://nces.ed.gov/timss/pdf/TIMSS2011_G8_Math.pdf

APÉNDICE B

1. Third National Assessment of Educational Progress problem, citado en Silver, Shapiro y Deutsh [1993, p. 118] [ver cita en los comentarios]

2. Jacobs, J. E. y Kennedy, D. I. (2015) . *Rich Tasks That Promote the Standards for Mathematical Practice*. NCTM Regional Conference, octubre 2015. Disponible en línea: www.judithrules.com

3. Integrating Mathematical Modeling, Experiential learning and Research through a Sustainable Infrastructure and an Online Network (IMMERSION). Patrocinado por National Science Foundation, 2014–2017

4. Kara Imm y Meredith Lorbe, "The Footprint Problem", http://www.nctm.org/Publications/mathematics-teaching-in-middle-school/2013/Vol19/Issue1/The-Footprint- Problem_-A-Pathway-to-Modeling/

5. Hiebert, James y Douglas A. Grouws. (2007). The Effects of Classroom Mathematics Teaching on Students' Learning. En Frank K. Lester, Jr. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning*. (pp. 371–404). Charlotte, N.C.: Information Age; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

6. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM*). Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All.* Reston, Va.: NCTM, 2014. (Traducido por CIAEM como *De los principios a la acción*, https://www.nctm.org/Store/Products/De-los-principios-a-la-acci%C3%B3n--Para-garantizar-el-%C3%A9xito-matem%C3%A1tico-para-todos-(POD)(Spanish-Edition)/)

7. Fifth grade problem: Created with the Online Assessment Reporting System (OARS) and Key Data Systems (KDS).

8. Seventh grade problem: SBAC Interim Assessment (IAB), https://www.caaspp.org/ta-resources/interim.html

9. Eighth grade problem: Illustrative Mathematics, 8.EE Ants versus humans Illustrative Mathematics," https://www.illustrativemathematics.org/terms-of-use

APÉNDICE C

Aumann, R. y Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, 36, 195-213.

COMAP. (1987). *For All Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World*. 9na edición. New York: W. H. Freeman.

Compton, Helen y Teague, Daniel. (1996). "The Elevator Problem", *Everybody's Problems, Consortium*, Number 57. COMAP, Inc, Lexington, Massachusetts, Spring.

Doyle, Dot y Teague, Daniel. (2006) "The Midge Problem Revisited", *Everybody's Problems, Consortium,* Number 91, COMAP, Inc. Lexington, Massachusetts, Fall/Winter.

Doyle, Dot y Teague, Daniel. (2005). "The Gas Station Problem", *Everybody's Problems, Consortium*, Number 88, COMAP, Inc. Lexington, Massachusetts, Spring/Summer.

Malkevitch, J. (2005). "Resolving bankruptcy claims", American Mathematical Society, (columna en línea) http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-bankruptcy

Malkevitch, J. (2008). Bankrupt. *Consortium 95*, 1–5.

Malkevitch, J, 2009. Taxes, bankruptcy and the Talmud. *Consortium 97*, 1–5.

O'Neil, B. (1982). A problem of rights arbitration from the Talmud, *Mathematical Social Sciences*, 2, 345-371.

Thomson, W. (1983). The fair division of a fixed supply among a growing population *Mathematics of Operations Research*, 8 (3), pp. 319-326.

Thomson, W. (1994). Consistent solutions to the fair division problem when preferences are single-peaked. *Journal of Economic Theory*, 63(2), 219-245.

Thomson, W. (1994). Cooperative Models of Bargaining. En R. Aumann, S. Hart, (Eds.), *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volumen 2 (pp. 1237-1284). Holanda del Norte, Amsterdam.

Thomson, W. (2003). Axiomatic and game-theoretic analyses of bankruptcy and taxation problems: A survey. *Mathematical Social Sciences*, 45, 249–297.

Thomson, W. (2007). Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update. *Mathematical Social Sciences*, 74, 41-59.

Thomson, W. y Hokari, T. (2003). Bankruptcy and weighted generalizations of the Talmud rule. *Economic Theory*, 21, 241-261.

Young, H. (1994). *Equity in Theory and Practice*. Princeton: Princeton U. Press.

APÉNDICE D

Galluzzo, B. y Wendt, T. (2015). The 24-Hour Mathematical Modeling Challenge. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 50(1), 50-60.

AGRADECIMIENTOS

La visión y esperanza compartida del Consorcio de Matemáticas y su Aplicación (COMAP) y la Sociedad para las Matemáticas Industriales y Aplicadas (SIAM) es que este reporte motive a la comunidad educativa a hacer lugar dentro del currículo para la modelación, desde el nivel preescolar hasta el universitario; más aún, que el valor y la importancia de las habilidades requeridas para ejecutar efectivamente la modelación matemática – pensamiento lógico, resolución de problemas, análisis de sensibilidad y comunicación, para nombrar algunas – sean reconocidos y promovidos. COMAP y SIAM, así como el equipo de autores, los cuales han donado su tiempo y experiencia a este reporte, y sin los cuales no existiría este documento, se sienten orgullosos de publicar esta primera edición del Reporte GAIMME: Lineamientos para la Evaluación e Instrucción en la Educación en Modelación Matemática.

Se reconoce a nuestro equipo de autores por las horas y horas de trabajo, creando y compilando contenido, a lo largo de tormentas de nieve y vacaciones interrumpidas, firmemente y sin remuneración, con alegre entusiasmo para compartir conocimiento y diseminar información. En particular, los autores con mayores cargas de trabajo fueron:

Rachel Levy con Rose Mary Zbiek	Secciones de primaria y educación media
Dan Teague con Landy Godbold	Sección de educación media superior
Frank Giordano con Karen Bliss	Sección de nivel universitario
Heather Gould	Apéndice de recursos
Ben Galluzzo	Apéndice de evaluación
Sol Garfunkel	Prefacio

Adicionalmente, los siguientes profesionales de las matemáticas escribieron, editaron, discutieron y deliberaron sobre el contenido de este reporte:

Katie Fowler, Jessica Libertini, Mike Long, Joe Malkevitch, Henry Pollak y Henk van der Kooij

Se agradece al personal de cada organización socia por sus contribuciones a la producción del reporte GAIMME, en particular a George Ward, gerente de producción de COMAP; Esme McTighe, revisora de textos de COMAP; Kelly Thomas, directora editorial de SIAM y Cally Shrader, producción de SIAM.

Damos nuestro sincero agradecimiento a los profesionales, demasiados para ser nombrados aquí, que leyeron y comentaron versiones de este documento a lo largo del proceso de escritura.

SIAM y COMAP reconocen la cooperación del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) al compartir ideas y perspectivas de muchos de sus líderes principales, así como a la diseminación entre sus miembros y la comunidad de educación matemática de la información de GAIMME.

SIAM y COMAP reconocen el apoyo del Moody's Mega Math Challenge y Moody's Foundation para la impresión y distribución de copias del reporte dentro de nuestras comunidades de matemáticas aplicadas y ciencias computacionales.

Respetuosamente,

James Crowley, Director Ejecutivo, SIAM

Sol Garfunkel, Director Ejecutivo, COMAP

Michelle Montgomery, Directora de Marketing y Difusión, SIAM

Como una asociación entre SIAM y COMAP, el Reporte GAIMME: Lineamientos para la Evaluación e Instrucción en la Educación en Modelación Matemática facilita el proceso de modelación para que sea entendido como parte de los estudios y la investigación STEM, así como enseñado como una herramienta básica para resolver problemas y para el razonamiento lógico. GAIMME ayuda a definir las competencias centrales a ser incluidas en la experiencia de los estudiantes y proporciona dirección para mejorar la educación de la modelación matemática a todos los niveles. Una mezcla de profesionales escribió y revisó las secciones para presentar varios niveles y perspectivas, el reporte GAIMME es descargable gratuitamente desde los sitios web de SIAM y COMAP.

EQUIPO DE AUTORES

Karen Bliss
Kathleen Fowler
Ben Galluzzo
Sol Garfunkel
Frank Giordano
Landy Godbold
Heather Gould
Rachel Levy
Jessica Libertini
Mike Long
Joe Malkevitch
Michelle Montgomery
Henry Pollak
Dan Teague
Henk van der Kooij
Rose Zbiek
con sugerencias de varios revisores

CONTENIDOS

¿Qué es Modelación Matemática?
Grados de primaria y educación media
Educación media superior
Nivel Universitario
Recursos

E INCLUYE

Problemas ejemplificativos y recursos
Niveles de sofisticación
Discusión de la implementación del docente
Sugerencias para la evaluación

FINANCIADO POR

COMAP
SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics

con la cooperación de NCTM y el apoyo de Moody's Mega Math Challenge

TRADUCIDO AL ESPAÑOL POR

CIAEM CIAME

Traductor: Emiliano Quintanar
Revisión técnica: Patrick Scott y Nelly León